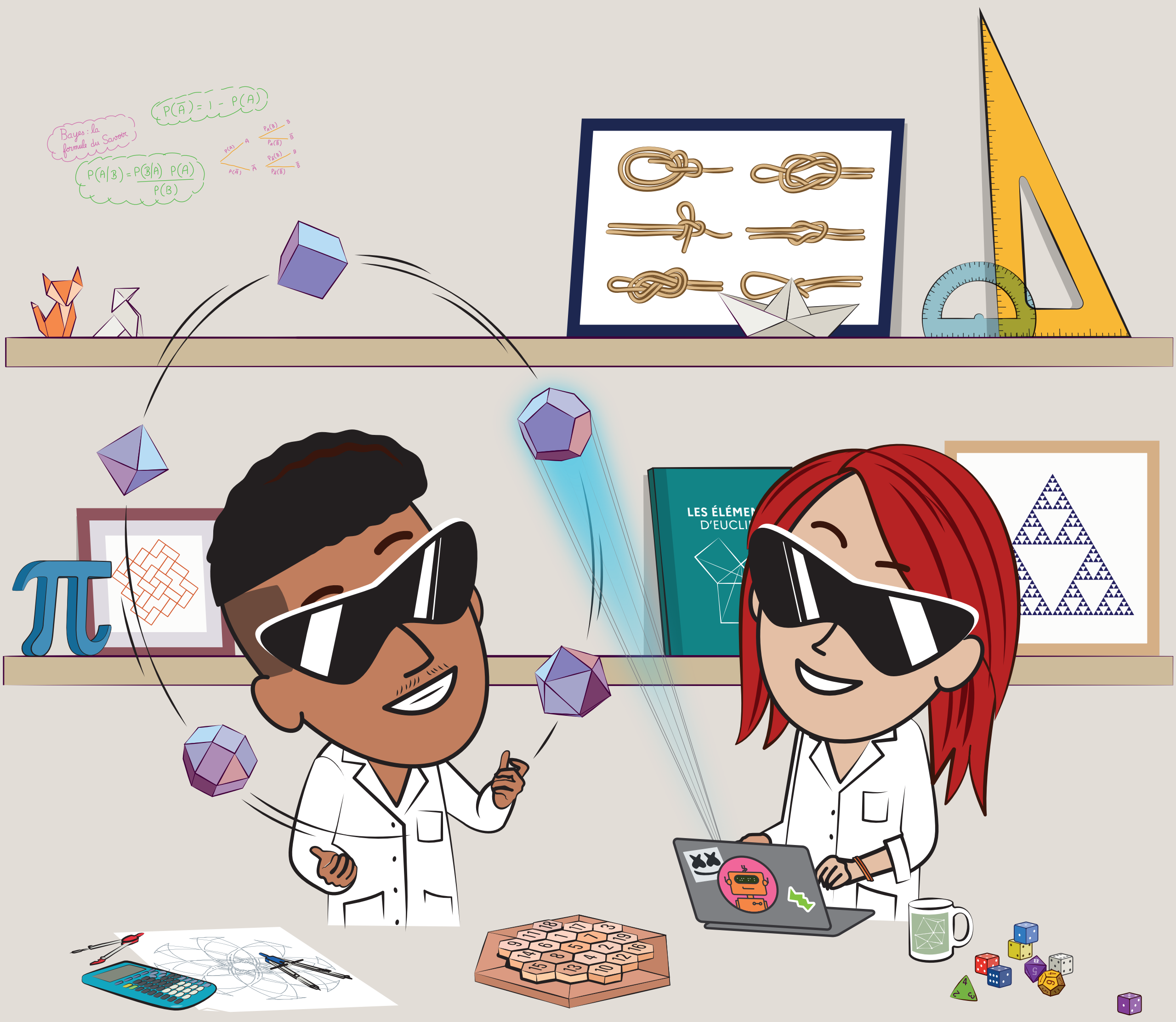
OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

CLERMONT-FERRAND 2023

SUJET DE L'ÉPREUVE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

OLYMPIADES NATIONALES 2023
DE MATHÉMATIQUES



Épreuve le mercredi 15 mars 2023 (le 14 en Polynésie française). 4 exercices en 4 heures.
Palmarès national et académiques, en individuel et par équipes mixtes (de 2, 3 ou 4), selon cursus (technologique, général, général spécialité mathématiques).
Inscriptions auprès de vos professeurs de mathématiques jusqu'au 17 février 2023.

ACADÉMIE
DE CLERMONT-FERRAND
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2023

Académie de Clermont-Ferrand
Partie académique - 2 heures

Cette deuxième partie est indépendante de la première et peut être réalisée par équipe.
Il est attendu une seule copie par équipe.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Cette deuxième partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 - 2 - 3.

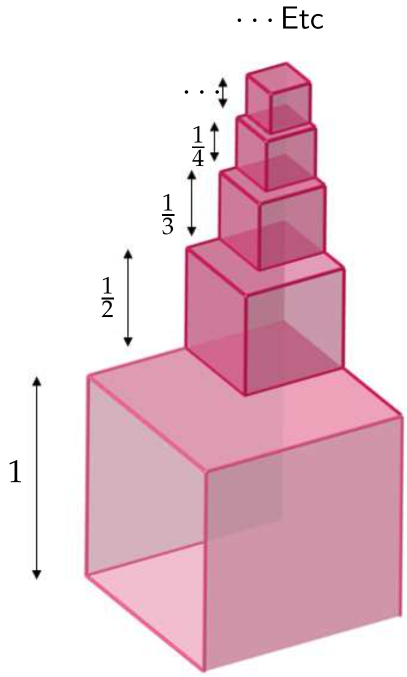
Les autres candidats doivent traiter les exercices académiques 1 - 2 - 4.

Les copies abordant de manière significative les trois exercices à traiter seront valorisées.

Exercice 1

À traiter par tous les candidats

Cet exercice est composé de deux parties A et B largement indépendantes.



Un artiste désire réaliser la structure ci-contre ainsi conçue :

- Moulage de n cubes pleins en matière plastique, d'arêtes successives, en mètre, où n est un entier naturel non nul :

$$1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{4}\,;\cdots;\,\frac{1}{n}\ :\ \text{pour } n \in \mathbb{N}^{\star}.$$

- Revêtement de **toutes** les faces de chaque cube par une couche de peinture.
- Empilement de tous ces cubes, par tailles décroissantes, dans une salle de musée.

Partie A

1. Rappeler les formules du volume V d'un cube de côté c et de l'aire A de sa surface latérale.

   L'artiste dispose d'un volume total de 2 m^3 de plastique (malléable à volonté) et d'une quantité de peinture permettant de recouvrir une surface de 10 m^2. D'autre part, la salle du musée a une hauteur sous plafond de 2,2 m.

   L'artiste envisage la création de cette structure avec 5 cubes, d'arêtes successives, en mètre :

$$1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{5}.$$

2. Dispose-t-il d'assez de plastique et de peinture pour la création de sa structure ?
3. Peut-il exposer sa structure dans la salle du musée ?

Partie B

1. (a) Justifier que pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

   (b) En déduire le calcul de la somme

$$S = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{4\times 5} + \cdots + \frac{1}{2022\times 2023}.$$

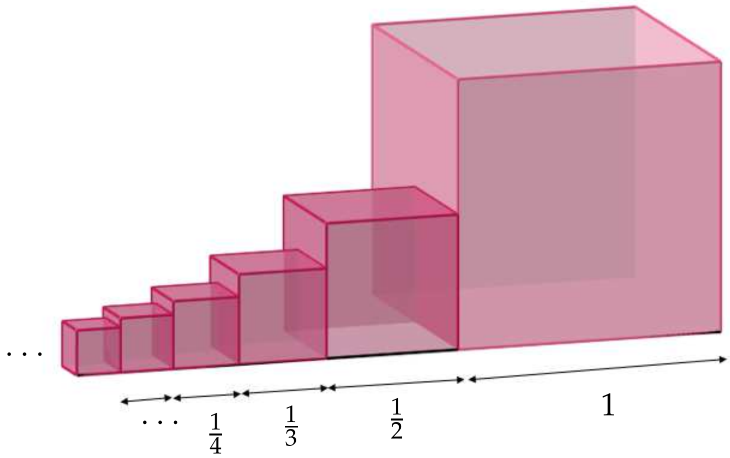
2. (a) Justifier que pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{(k-1)k} \cdot (*)$$

(b) Ajouter membre à membre l'inégalité (*) pour k allant de 2 à n. En déduire alors que pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 1 - \frac{1}{n} \leqslant 1.$$

(c) Finalement, l'artiste décide de ne pas installer sa structure à l'intérieur du musée mais plutôt de la présenter couchée, à l'extérieur dans le jardin du musée. Il pourra ainsi ne pas se limiter à 5 cubes et continuer sa structure comme décrite au départ.
L'artiste dispose toujours d'un volume total de 2 m^3 de plastique (malléable à volonté) et d'une quantité de peinture permettant de recouvrir une surface de 10 m^2 .



Il pense avoir suffisamment de plastique et de peinture pour réaliser et peindre autant de cubes qu'il veut. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 2

À traiter par tous les candidats

La course *Wings For Life* est une course à pied sur route d'un genre particulier. Elle a lieu tous les ans (en 2023, ce sera le 7 mai) dans différents pays simultanément. Les coureurs de France et d'Australie partent donc en même temps, quel que soit l'horaire local.

L'autre originalité de cette épreuve est sa durée : comme les participants sont sur des parcours différents, il n'y a pas de ligne d'arrivée matérielle. Alors, comment désigner le vainqueur ?

Une demi-heure après le départ des coureurs, dans chaque pays organisateur, une voiture, appelée ≪ Catcher Car ≫ démarre et roule sur le parcours de la course à une vitesse constante de 14 km/h. Dès que la voiture rattrape un coureur, celui-ci doit s'arrêter : la course est finie pour lui. On relève alors son temps de course et la distance parcourue.

Après à nouveau 30 minutes, la Catcher Car accélère instantanément pour rouler à 15 km/h et on applique le même principe aux coureurs rattrapés. La voiture continue son accélération en suivant le plan suivant :

Départ des coureurs + 30 minutes : 14 km/h
Départ des coureurs + 1h : 15 km/h
Départ des coureurs + 1h 30 minutes : 16 km/h
Départ des coureurs + 2h : 17 km/h
Départ des coureurs + 2h 30 minutes : 18 km/h
Départ des coureurs + 3h : 22 km/h
Départ des coureurs + 3h30 : 26 km/h

Le vainqueur est le dernier participant à être rattrapé.

Tiphanie et Marco participent à la course. En EPS, ils ont effectué un test VMA (Vitesse Maximale Aérobie). Tiphanie a une VMA de 12 km/h et Marco une VMA de 19,5 km/h.

Ils savent que la course est longue ; aussi ils décident de courir à une vitesse constante égale à 60 % de leur VMA.

Déterminer par la méthode de votre choix (calculs, graphiques, autre méthode) quels distances (en kilomètres, arrondi à 10^{-1}) et temps (en heures et minutes, arrondi à la minute) Tiphanie et Marco peuvent espérer courir pendant la Wings for Life.

Exercice 3

À traiter uniquement par les candidats suivant l'enseignement de spécialité Mathématiques de la voie générale.

Cet exercice est composé de quatre parties dont les trois premières sont largement indépendantes.

Partie A : Un phénomène bien étrange.

On effectue une manipulation à la calculatrice : on choisit un nombre, ici 0,5.
On lui applique la fonction Arctan puis la fonction Cosinus. Puis on recommence : on applique au nombre alors obtenu la fonction Arctan puis Cosinus, et on réitère le processus.

On se propose d'observer les valeurs successives obtenues après plusieurs itérations et de consigner les résultats dans un tableau.
Attention : pour utiliser Arctan il vous faudra taper, selon les différents modèles de calculatrice :

Casio	TI	Numworks
shift +Atn	2nde + arctan	shift + atan

1. Compléter le tableau correspondant à votre calculatrice de l'Annexe 1 et coller ou recopier le sur votre copie.
2. On recommence cette manipulation avec 1,5 comme nombre de départ. Compléter puis recopier ou coller le tableau proposé en Annexe 2.
3. Reproduire et compléter un tableau similaire au précédent avec un réel positif de départ de votre choix. Émettre une conjecture.
4. On considère la suite de réels (u_n) définie par $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = \cos\left(\text{Arctan}(u_n)\right)$, pour tout entier $n \geqslant 0$. Que peut-on conjecturer sur la limite de la suite (u_n) ?

Partie B : Un peu de trigonométrie.

On considère le triangle ABC rectangle en B ci-contre où x désigne un réel positif. On désigne par θ une mesure de l'angle $\widehat{CAB}$.

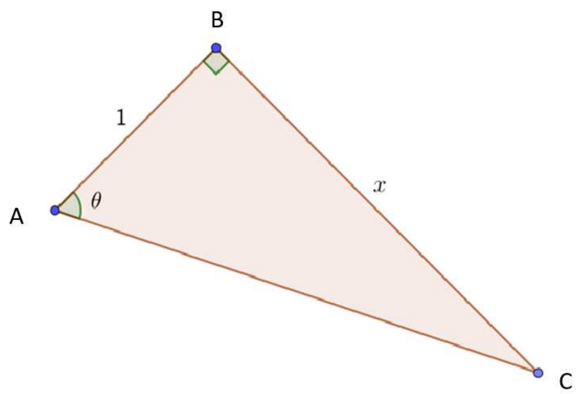
1. Calculer la longueur de l'hypoténuse $[AC]$ de ce triangle rectangle.

2. On rappelle que, dans un triangle rectangle, les valeurs du cosinus et du sinus d'un angle aigu sont données par les expressions :

$$\cos(\theta) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \qquad \sin(\theta) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

   (a) Exprimer $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de x.

   (b) On définit alors le nombre réel noté $\tan(\theta)$ par $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$. Montrer que $\tan(\theta) = x$.



3. Ainsi, pour un réel positif x donné au départ, on admet que l'on peut déterminer la valeur de θ en fonction de celle de x par la relation :

$$\theta = \text{Arctan}(x).$$

Déduire des questions précédentes que :

$$\cos\left(\text{Arctan}(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4. En déduire une nouvelle relation de récurrence suivie par la suite (u_n).

Partie C : Une suite particulière, la suite de Fibonacci.

La suite de Fibonacci, notée (F_n), porte le nom d'un célèbre mathématicien italien Léonard de Pise, autrement appelé Léonardo Pisano ou Fibonacci, qui, dans un problème récréatif, a considéré l'évolution d'une population de lapins.

Ainsi, le n-ième terme de cette suite correspond au nombre de paires de lapins au n-ième mois.
Dans cette population idéale, on suppose donc que :

- Au début du premier mois, il n'y a qu'une paire de lapins déjà âgés de 1 mois (ce qui fait que l'on pose par convention $F_0 = 1$).
- Les lapins ne peuvent procréer qu'à l'âge de deux mois.
- Chaque début de mois, toute paire susceptible de procréer engendre exactement une nouvelle paire de lapereaux.
- Les lapins ne meurent jamais (la suite de Fibonacci est donc croissante et strictement positive) !

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui fournit les valeurs des dix premiers termes de cette suite.

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9
1									

2. Expliquer pourquoi on obtient bien la relation de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
3. On pose désormais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad b_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$b_{n+1} \times b_n = b_n + 1.$$

   (b) On considère maintenant la suite (a_n) définie par $a_n = \frac{1}{b_n}$ pour tout $n \geqslant 0$.

   Déterminer une relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

4. On admet que la suite (b_n) admet effectivement une limite et que cette limite est le réel positif noté φ, appelé Nombre d'Or, tel que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   Conjecturer la limite de (a_n).

Partie D : Synthèse.

On cherche désormais à comprendre le résultat conjecturé dans la Partie A.

On considère donc un réel positif quelconque x ainsi que la suite (u_n) définie par $u_0 = x$ et

$$u_{n+1} = \cos\left(\text{Arctan}(u_n)\right), \text{pour tout entier } n \geqslant 0.$$

1. Déduire des résultats de la partie B une relation de récurrence entre u_{n+1}^2 et u_n^2.
2. En utilisant les résultats de la partie C, quel est le lien entre les suites (a_n) et (u_n) ?
3. Si la suite (u_n) a pour limite L, qu'en est-il de la suite $(\cos(\text{Arctan}(u_n)))$?
4. Expliquez pourquoi, intuitivement, le réel L vérifie l'égalité $L = \cos(\text{Arctan}(L))$.
   En déduire une équation de degré 4 vérifiée par L.
5. (a) En déduire la valeur exacte de L^2 puis de L en justifiant pourquoi $L > 0$.
   (b) Montrer que $L = \sqrt{\frac{1}{\varphi}}$.
   (c) Donner une valeur approchée de L à 10^{-3} près. Est-ce bien $0,786$?

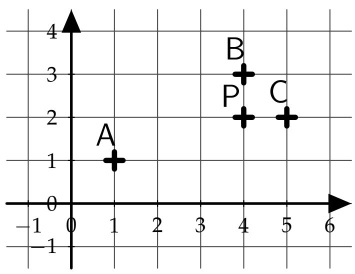
Exercice 4

À traiter par les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité Mathématiques de la voie générale.

Des points et des courbes

Soit A, B et C trois points d'un repère. On cherche dans cet exercice, une méthode simple (que nous pourrons généraliser pour plus de points) permettant de trouver l'expression d'une fonction polynôme dont la courbe représentative passe par ces trois points.

A. Quelques exemples



1. (a) Soit $A(1\ ;\ 1)$, $B(4\ ;\ 3)$ et $P(4\ ;\ 2)$ trois points d'un repère. Existe-t-il une fonction dont la courbe représentative passe par ces trois points ? Justifier brièvement.
   (b) Donnez une condition nécessaire sur A, B et C pour que l'on puisse trouver une fonction dont la courbe représentative passe par ces trois points.
2. Soit $A(1\ ;\ 1)$, $B(4\ ;\ 3)$ et $C(5\ ;\ 2)$ trois points du repère.
   Après quelques essais en traçant des courbes sur sa calculatrice, un élève conjecture que la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -0,4x^2 + 2,7x - 1,3$ passe par A, B et C. Est-ce le cas ?
3. Pour répondre au problème, intéressons-nous aux trois points suivants : $A'(1\ ;\ 0)$, $B'(4\ ;\ 0)$ et $C'(5\ ;\ 0)$.

(a) Montrez que la courbe représentative de la fonction polynôme f_A définie sur $\mathbb{R}$ par $f_A(x) = \dfrac{1}{12}(x-4)(x-5)$ passe par $A(1\ ;\ 1)$, $B'(4\ ;\ 0)$ et $C'(5\ ;\ 0)$.

(b) En vous aidant de la question précédente, déterminez l'expression d'une fonction polynôme f_B définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative passe par A', B et C'.

(c) Même question pour une fonction f_C définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative passe par A', B' et C.

(d) Montrez que la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = f_A(x) + f_B(x) + f_C(x)$$

passe par A, B et C.

B. Cas général pour trois points

Soit $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ trois points tels que $x_A \neq x_B$, $x_B \neq x_C$, et $x_A \neq x_C$.
Soit f_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \dfrac{(x-x_B)(x-x_C)}{(x_A-x_B)(x_A-x_C)} \times y_A$.

1. La courbe représentative de f_1 passe par l'un des trois points. Lequel ?
2. La courbe représentative de f_1 coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Si oui, en quels points ?
3. Donnez l'expression d'une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative passe par $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$.

C. Pour quatre points

Soit quatre points $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$ et $D(x_D;y_D)$.
À quelle condition nécessaire et suffisante existe-t-il une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative passe par ces quatre points ? Justifier.

ANNEXE 1

Tableau à compléter pour une calculatrice Casio Graph 35 + :

Séquence de touches à taper sur le clavier	Affichage	Valeur numérique obtenue à 10^{-3} près
cos shift Atn 0.5 EXE	$\cos\tan^{-1} 0.5$	0.894
cos shift Atn shift Ans EXE	$\cos\tan^{-1} Ans$	0.745
cos shift Atn shift Ans EXE	$\cos\tan^{-1} Ans$	0.802
cos shift Atn shift Ans EXE	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Tableau à compléter pour une calculatrice TI 82 :

Séquence de touches à taper sur le clavier	Affichage	Valeur numérique obtenue à 10^{-3} près
cos 2nd tan^{-1} 0.5)) ENTER	$\cos(\tan^{-1}(0.5))$	0.894
cos 2nd tan^{-1} 2nd Ans)) ENTER	$\cos(\tan^{-1}(Ans))$	0.745
cos 2nd tan^{-1} 2nd Ans)) ENTER	$\cos(\tan^{-1}(Ans))$	0.802
cos 2nd tan^{-1} 2nd Ans)) ENTER	$\cos(\tan^{-1}(Ans))$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Tableau à compléter pour une calculatrice Numworks :

Séquence de touches à taper sur le clavier	Affichage	Valeur numérique obtenue à 10^{-3} près
cos shift Atn 0.5 EXE	$\cos(\text{atan}(0.5))$	0.894
cos shift Atn Ans EXE	$\cos(\text{atan}(Ans))$	0.745
cos shift Atn Ans EXE	$\cos(\text{atan}(Ans))$	0.802
cos shift Atn Ans EXE	$\cos(\text{atan}(Ans))$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

ANNEXE 2

Nombre d'itérations des fonctions artan puis cosinus	Valeur numérique obtenue à 10^{-3} près
0	$1,5$
1	
2	
3	
4	
5	
$\cdots$	
$\cdots$	
$\cdots$	