OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

CLERMONT-FERRAND
2022

SUJET DE L'ÉPREUVE

22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

Olympiades de Mathématiques 2022
Partie académique

Sujet _ Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

Partie A

Le concombre est une plante herbacée rampante de la famille des cucurbitacées, constitué, lorsqu'il est frais, à 99% d'eau.
Un homme possède 500kg de concombre frais. Les concombres sont, à ce moment-là, constitués à 99% d'eau. Il les entrepose dans un local, et le lendemain matin, à cause de la chaleur, ces mêmes concombres ne sont plus composés que de 98% d'eau.
Quelle est alors, au matin, la masse de l'ensemble des concombres ?

Partie B / Le sudomaths

	A2		A4		A6			A9
				B5	B6		B8	
	C2	C3	C4	C5		C7		
D1		D3			D6			
	E2						E8	E9
F1			F4	F5		F7		
G1		G3		G5		G7	G8	
	H2		H4	H5				H9
I1			I4				I8	

A2 $\sqrt{25}$

A4 Antécédent positif de 9 par la fonction carré

A6 Image de $\frac{2}{3}$ par la fonction $x \longmapsto 6x+2$

A9 5 augmenté de 40%

B5 $4\sqrt{4}$

B6 Le double de $\frac{15^3 \times 2^2}{5^2 \times 6^3}$

B8 Nombre premier pair

C2 Chiffre impair ayant exactement trois diviseurs

C3 Valeur initiale d'un objet qui, après une baisse de 30%, coûte $5,60$€

C4 Ordonnée du point d'abscisse 1 sur la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto x^2 - 2x + 5$

C5 Chiffre des dizaines du volume d'un cube de côté 9

C7 Nombre de diviseurs de 20

D1 $\frac{\sqrt{324}}{2}$

D3 9^0

D6 $? \times \sqrt{2} = \sqrt{18}$

E2 $\frac{\left(10^{2022}+1\right)^2 - \left(10^{2022}-1\right)^2}{10^{2022}}$

E8 $\frac{10^{-2}}{0{,}01}$

E9 Racine carrée du carré de -3

F1 Nombre de côtés d'un pentagone

F4 Dans un tétraèdre : nombre de faces - nombre d'arêtes + nombre de sommets

F5 Nombre d'entiers naturels compris entre 1 et 20 qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5

F7 30% de 30

G1 Le quart du seizième de 256

G3 Moyenne de tous les chiffres obtenus dans la grille entièrement complétée

G5 $\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{9}{8}$

G7 Nombre d'axes de symétrie d'un triangle équilatéral

G8 Nombre de sommets d'un cube

H2 $\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{12}$

H4 Longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant 3 et 4 pour mesures des deux côtés de l'angle droit

H5 Résultat le plus probable obtenu en additionnant les deux chiffres issus d'un lancer de deux dés équilibrés à six faces

H9 $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2$

I1 $\frac{\sqrt{192}-\sqrt{128}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

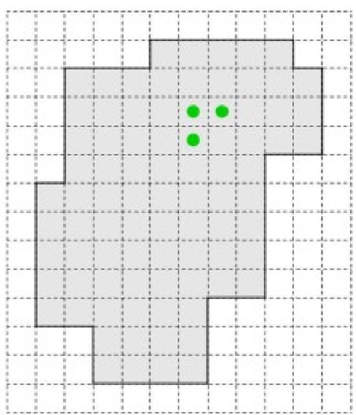
I4 $2^{?} = 2$

I8 Solution de l'équation $4x - 5 = 2x + 9$

Partie C

Alys, Bob et Chris doivent se partager une propriété qui est désignée sur le plan ci-dessous par un polygone grisé. Ils tiennent pour cela à respecter toutes les règles de droit et d'équité :

- le découpage à effectuer doit suivre impérativement les lignes cadastrales indiquées en pointillé ;
- les trois parts doivent avoir exactement la même forme, c'est-à-dire que l'on doit pouvoir les superposer quitte à les déplacer en les faisant tourner, glisser ou même en les retournant ;
- chacun veut récupérer sur sa parcelle un des pommiers qui sont désignés par trois disques à l'intérieur du plan de la propriété (on précise que les pommiers ne peuvent être déplacés).



Reproduire le plan de la propriété sur votre copie et dessiner les trois parcelles.

Sujet _ Exercice 2 (pour les élèves suivant l'eds Maths en voie générale)

Dans cet exercice, on s'intéresse aux sommes de deux carrés d'entiers différents et non nuls.
On dira que l'entier m est dans l'ensemble Σ s'il existe deux entiers x, y tels que $m = x^2 + y^2$ avec $x, y \in \mathbb{N}$ et $x > y \geq 1$.

Par exemple, 112 + 102 = 221 et 312 + 172 = 1250 appartiennent à Σ. Pour montrer qu'un entier m appartient à l'ensemble Σ, il suffit de trouver un couple (x ; y) d'entiers tels que $x > y \geq 1$ et $x^2 + y^2 = m$.
Un tel couple sera appelé un couple m-admissible. En revanche, pour montrer que l'entier m n'appartient pas à Σ, il faut fournir un raisonnement logique pour prouver qu'il n'existe aucun couple m-admissible.

1. Pour chacun des entiers suivants, dire s'il appartient ou non à l'ensemble Σ : 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 17.

2. Un élève propose le raisonnement suivant : « 50 = 52 + 52 or le couple (5 ; 5) n'est pas 50-admissible puisqu'il est formé de deux nombres égaux, donc 50 n'appartient pas à Σ ». Que penser de ce raisonnement ?

3. Soit m un élément de Σ et k un entier strictement positif. On souhaite montrer que l'entier $2^k m$ appartient encore à l'ensemble Σ.
3.a Montrer cette propriété lorsque k est pair.
3.b Pour $x, y \in \mathbb{N}$, calculer $(x + y)^2 + (x - y)^2$.
3.c Démontrer la propriété énoncée lorsque k est impair.

4. On montre ici la réciproque : on se donne deux entiers m et k strictement positifs tels que $2^k m$ appartient à l'ensemble Σ et l'on va montrer que m appartient à Σ.
4.a Soit (x ; y) un couple $2^k m$-admissible. Montrer que x et y ont même parité.
4.b Déduire du calcul fait à la question 3.b que $2^{k-1}m$ appartient à l'ensemble Σ. Conclure.

5. On se demande si l'ensemble Σ est stable par somme. Autrement dit, on veut savoir si, pour deux éléments quelconques m, n de l'ensemble Σ, on a toujours $m + n \in \Sigma$. À l'aide d'exemple(s), conjecturer que cette propriété semble vraie ou démontrer qu'elle est fausse.

6. On regarde maintenant si l'ensemble Σ est stable par produit : pour deux éléments quelconques, m, n de l'ensemble Σ, on souhaite déterminer si l'on a toujours $m \times n \in \Sigma$.
6.a À l'aide d'exemple(s), conjecturer que cette propriété semble vraie ou démontrer qu'elle est fausse.
6.b Pour $x, y, z, t \in \mathbb{N}$, montrer que $(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = (xz - yt)^2 + (xt + yz)^2$.
6.c En déduire que si m, n sont des nombres impairs appartenant à Σ, alors mn reste dans Σ.
6.d Finalement, l'ensemble Σ est-il stable par produit ?

7. Dans cette question, on s'intéresse à des critères de reste par division euclidienne.
Étant donné un entier m > 0, on note r(m) son reste dans la division par 4. On rappelle que r(m) peut valoir 0, 1, 2 ou 3.
On va montrer que si r(m) = 3, alors m n'appartient pas à Σ.
7.a Pour un entier x > 0, montrer que $r(x^2)$ vaut 0 ou 1.
7.b En déduire que si m est dans Σ, alors r(m) vaut 0, 1 ou 2. Conclure.

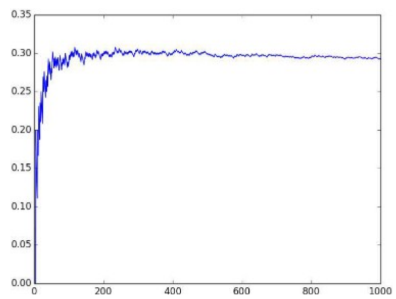
8. Au vu de toutes les propriétés établies, dire pour les éléments suivants s'il appartient ou non à l'ensemble Σ : 104, 2022, 1234567.

9. Soit m un élément de Σ et (x ; y) un couple m-admissible.
9.a Montrer les encadrements suivants.

$$\sqrt{\frac{m+1}{2}} \leq x \leq m-1 \text{ et } 1 \leq y < \sqrt{\frac{m}{2}}.$$

9.b L'entier 3024 est-il dans Σ ?

10. Pour tout entier n > 1, on note p(n) la probabilité qu'un entier k choisi au hasard compris entre 1 et n (au sens large) appartienne à l'ensemble Σ : p(n) = (nombre d'entiers $k \in [1, n] \cap \Sigma$) / n.
Voici le graphe de l'application p sur l'intervalle d'entiers {1, 2, 3, · · · , 1000}.



Tracer le graphe de l'application p sur l'intervalle d'entiers {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

11. Pour tout entier n > 0, on pose *s*(n) = 1 si l'entier n est dans Σ et $\sigma(n) = 0$ sinon.

11.a Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $C(n) = \sigma(1) + \sigma(3) + \sigma(5) + \ldots + \sigma(2n + 1)$. Montrer que $C(n) \leq \frac{n}{2}$.

11.b.i Vérifier que cela est vrai pour $n \leq 7$.

11.b.ii On fixe un entier $n \geq 4$ et l'on suppose avoir montré l'inégalité $p(k) \leq \frac{k}{2}$ pour tout entier $k \leq 2n - 1$.

Montrer que l'inégalité reste vraie au rang 2n. On commencera par montrer que $2n\,p(2n) = n\,p(n) + C(n - 1)$.
Montrer enfin que l'inégalité reste vraie au rang 2n + 1. De proche en proche, on a ainsi montré que l'inégalité est toujours vraie.
12. En prenant appui sur un résultat obtenu à la question 11, formuler une ou plusieurs conjectures à propos de la représentation graphique de l'application p sur l'intervalle d'entiers {1, 2, 3, · · · , 10000}.

Sujet _ Exercice 3 (pour les élèves ne suivant pas l'eds Maths en voie générale)

On dispose de deux récipients de contenance A et B en litre (L). Pour chacun d'eux, on a le droit uniquement d'effectuer les actions suivantes :
- de le remplir d'eau entièrement,
- de le vider entièrement de son eau,
- de déverser l'eau qu'il contient dans l'autre récipient jusqu'à ce que le premier soit vide ou que le second soit plein.

Par exemple, pour A = 3L et B = 5L, on peut considérer les manipulations suivantes qui permettent d'obtenir une quantité d'eau de 4L.

Récipient A	**Récipient B**	**Action**
0	0	Au départ les deux récipients sont vides.
3	0	On remplit le 1er récipient.
0	3	On verse l'eau du 1er récipient dans le 2nd.
3	3	On remplit le 1er récipient.
1	5	On verse l'eau du 1er récipient dans le 2nd.
1	0	On vide le 2nd récipient.
0	1	On verse l'eau du 1er récipient dans le 2nd.
3	1	On remplit le 1er récipient.
0	4	On verse l'eau du 1er récipient dans le 2nd.

1. Si A = 3L et B = 5L, peut-on obtenir une quantité de 2L d'eau ? Justifier.
2. Si A = 8L et B = 10L, peut-on obtenir une quantité de 9L d'eau ? Justifier.
3. Si A = 11L et B = 17L, peut-on obtenir toutes les quantités entières d'eau, de 1L à 17L ? Justifier

Erreurs à corriger dans l'énoncé

Exercice 2.

Au début de l'énoncé, il faut lire :

Par exemple $11^2 + 10^2 = 221$ et $31^2 + 17^2 = 1250$

Question 2.

Il faut lire : $50 = 5^2 + 5^2$

Question 11.b.ii.

Il faut lire « on suppose avoir montré $p(k) \leq \frac{1}{2}$ » et non $p(k) \leq \frac{k}{2}$

Question 12.

Le dernier nombre de l'énoncé est 1000 et non 10000.