OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

CLERMONT-FERRAND 2021

SUJET DE L'ÉPREUVE

21^{e} OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades académiques de mathématiques 2021

Académie de Clermont-Ferrand

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune.

Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

La première partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

Une merveilleuse règle mathématique.

« Très illustre amateur de mathématiques, comme rien n'est aussi pénible que la pratique des mathématiques, parce que la logistique est d'autant plus freinée, retardée que les multiplications, les divisions et les extractions de racines carrées ou cubiques portent sur des grands nombres ; qu'elle est soumise à l'ennui des longues opérations et beaucoup plus encore à l'incertitude des erreurs, j'ai entrepris de rechercher par quel procédé sur et rapide on pourrait éloigner ces obstacles. Dans ce but, j'en ai examiné une grande quantité, les uns après les autres [……] aucun parmi les autres n'est plus utile que l'un d'eux, par son moyen, on rejette les nombres utilisés dans les multiplications, les divisions, les extractions de racines lorsqu'elles sont difficiles et prolixes, et on les remplace par d'autres nombres que j'ai pris soin de leur adjoindre et l'on achève le calcul par des additions, des soustractions, des divisions par deux ou par trois seulement. Est-il un mystère qui, au milieu de tant d'autres, lui soit supérieur ; il m'a plu de communiquer son usage au monde des mathématiciens. » **Texte publié en 1614 par John Napier (1550 – 1617)**

Dans ce texte historique, John Napier annonce sa découverte d'une fonction très importante en mathématiques et en astronomie dont l'étude fait l'objet de ce sujet. Avec des notations modernes, le tableau ci-dessous donne la valeur de cette fonction en quelques réels strictement positifs. Les valeurs sont arrondies au millième.

x	$f(x)$
1	0
2	0.693
3	1.099
4	1.386
5	1.609
6	1.792
8	2.079

x	$f(x)$
9	2.197
4.5	
12	
1.5	
10	
60	
1024	

Partie 1 : Les propriétés algébriques de la fonction issue du travail de John Napier.

« … on rejette les nombres utilisés dans les multiplications, les divisions, les extractions de racines…, et on les remplace par d'autres nombres que j'ai pris soin de leur adjoindre et l'on achève le calcul par des additions, des soustractions, des divisions par deux ... »

1)

a) En utilisant le tableau, comparer $f(2) + f(3)$ et $f(6)$.

b) Napier a ainsi découvert une fonction f vérifiant une première propriété algébrique :

$f(x \times y) = f(x) + f(y)$ x et y désignant des nombres réels strictement positifs

En déduire le calcul de $f(12)$ de deux façons différentes pour illustrer cette propriété.

2)

a) Comparer $f(6) - f(3)$ et $f(2)$ ainsi que $\frac{1}{2} \times f(9)$ et $f(3)$

b) Enoncer puis prouver deux autres propriétés de la fonction f.

3) On admet également une quatrième propriété vérifiée par f :

" Pour tout entier n positif, pour tout réel x strictement positif, $f(x^n) = nf(x)$ "

Illustrer cette propriété par un exemple à l'aide du tableau.

4) Recopier sur votre copie et compléter les six cases vides du tableau en justifiant votre calcul par l'utilisation de l'une des quatre propriétés précédentes.

5)

a) On admet que $f(x) > 0$ si et seulement si $x > 1$.

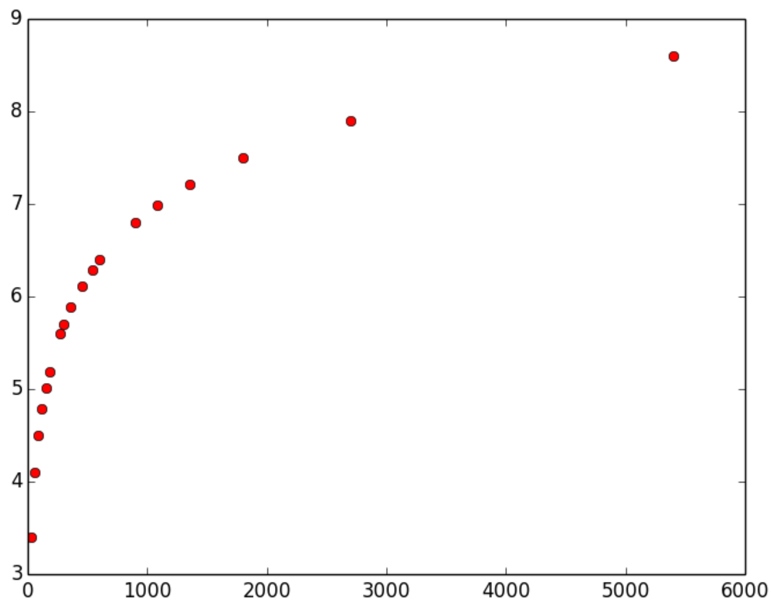
Soit $0 < a < b$, justifier que $f(a) - f(b) < 0$.

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

c) En déduire que pour tous x, y dans $]0,+\infty[$, $f(x) = f(y)$ entraîne $x = y$.

6) Compléter les lignes 5 et 6 de l'algorithme suivant afin que, lorsqu'on l'exécute, il affiche les points du graphique représenté à côté, de coordonnées $\left(2^i \times 3^j \times 5^k ; f\left(2^i \times 3^j \times 5^k\right)\right)$ pour des valeurs entières de *i*, *j* et *k* données.

```
1   def Napier ( ) :
2       for i in range (1, 4) :
3           for j in range (1, 4) :
4               for k in range (1, 3) :
5                   x = 2** ... 3**j*5**k
6                   y = i* ... + j* ... + k* ...
7                   plt.plot (x, y,'ro')
8       plt.show ( )
```



Partie 2 : La réciproque de cette nouvelle fonction.

1) Soit les fonctions h définie sur $]-1,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{1}{x+1}$ et g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1-x}{x}$.

a) Montrer que, pour $x > 0$, $h[g(x)] = x$.

b) Montrer de même que, pour $x > -1$, $g[h(x)] = x$.

2) Faire apparaitre à l'écran de votre calculatrice dans un même repère orthonormé les courbes de g et h. Les représenter sommairement sur votre copie.

Quelle remarque pouvez-vous faire sur ces courbes ? On dit que h et g sont des fonctions **réciproques.**

3) Sur le même graphique, tracer une allure de la courbe de la fonction f sur l'intervalle [1 ,12] ainsi que sa fonction réciproque (dont on admet l'existence) que l'on note r en tenant compte de la question précédente.

4)

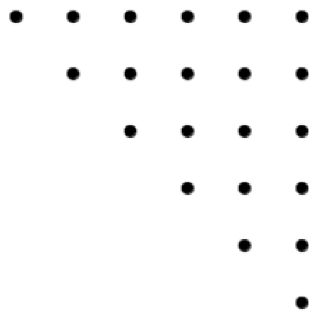
a) En utilisant la première propriété de la fonction f, montrer que la fonction r vérifie :

$$r(x+y) = r(x) \times r(y)$$

b) Par une méthode analogue, retrouver trois autres propriétés algébriques de cette même fonction r.

Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

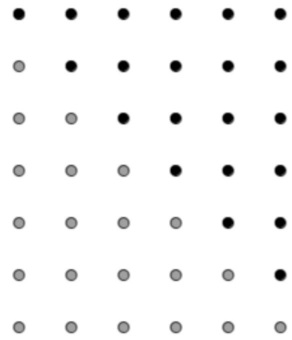
Escalier en somme.



1) On dispose des pièces de la façon suivante :

a) On place d'abord une pièce noire, puis dans une deuxième colonne à côté de la première, on place deux pièces noires, puis trois pièces dans une troisième colonne. On continue ainsi jusqu'à placer, dans une sixième colonne, six pièces noires.

Quel est le nombre total de pièces noires ainsi placées ?



b) On ajoute ensuite des pièces grises comme ceci : d'abord six pièces grises dans la première colonne, puis cinq pièces grises dans la deuxième colonne, etc.

Combien y-a-t-il de pièces ainsi placées au total ?

En remarquant qu'il y a autant de pièces noires que de pièces grises, retrouver le nombre total de pièces noires.

c) On généralise la configuration ci-dessus, avec un nombre n quelconque de colonnes.

On dispose une pièce noire dans la première colonne, deux pièces noires dans la seconde, et enfin, n pièces noires dans la n-ième colonne.
On veut compter le nombre $S_1(n)$ de pièces noires ainsi placées.

Autrement dit, on cherche à calculer : $S_1(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

	Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	…	Colonne n
Ligne 1 (nombre de pièces noires)	1	2	3	…	n
Ligne 2 (nombre de pièces grises)	n	?	?	…	1

Quelle est en fonction de $S_1(n)$, la valeur de la somme des n entiers composant la première ligne du tableau ?
Même question pour la deuxième ligne du tableau ?
Quelle est en fonction de n, la valeur de la somme des deux entiers composant la première colonne du tableau ? la deuxième colonne ? la colonne n ?

En déduire que : $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.
Que vaut par exemple la somme $1 + 2 + 3 + \cdots + 2021$?

2) On se propose de trouver la valeur de la somme $S_1(n)$ en procédant d'une autre façon.

a) Soit *k* un entier. Vérifier que $[k+1]^2 - k^2 = 2 \times k + 1$.

b) On considère le tableau ci-dessous, où, d'après le calcul précédent, sur chaque ligne, le terme de la colonne (1) est égal au terme de la colonne (2) :

	colonne 1		colonne 2
Ligne 1	$2^2 - 1^2$	$=$	$2 \times 1 + 1$
Ligne 2	$3^2 - 2^2$	$=$	$2 \times 2 + 1$
⋮		⋮	
Ligne n	$(n+1)^2 - 1^2$	$=$	$2 \times n + 1$

c) Donner la valeur de la somme : $(2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + \cdots + ([n+1]^2 - n^2)$.

d) Justifier que la somme des entiers de la colonne (2) vaut $2 \times S_1(n) + n$, puis retrouver la valeur de $S_1(n)$.

3) On suppose dans cette question que l'entier n est pair, c'est-à-dire qu'il s'écrit n = 2*N* où *N* est un nombre entier.
L'étrange escalier représenté ci-dessous se trouve dans la ville de *far far away.*

a) On note L la longueur de cet escalier.

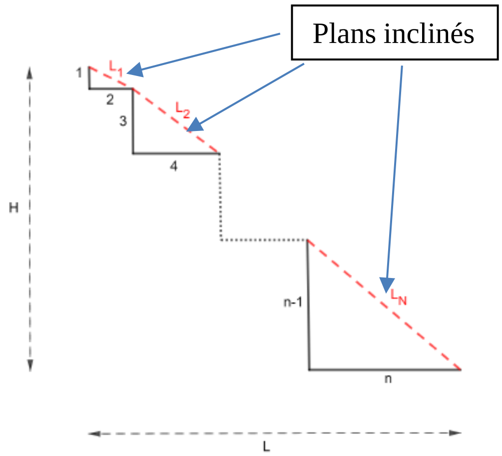
Autrement dit, $L = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2N$.

Justifier que l'on a : $L = \frac{n(n+2)}{4}$

b) En déduire la hauteur *H* de cet étrange escalier

c) Pour des raisons d'accessibilité, cet escalier a été depuis peu transformé en une succession de plans inclinés de longueurs respectives notées $L_1, L_2, \dots L_N$.

On considère la somme $S_2(n)$ des carrés de ces longueurs. Autrement dit :



$$S_2(n) = {L_1}^2 + {L_2}^2 + \cdots + {L_N}^2$$

Justifier à l'aide d'une propriété géométrique que : $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

d) Recopier et compléter la fonction Python Somme2(n) suivante qui renvoie la valeur de $S_2(n)$.
(On complètera les lignes 3 et 5.)

```
Ligne 1    def   Somme2(n) :
Ligne 2              " " " renvoie la valeur de 1**2+2**2+…n**2" " "
Ligne 3               S2 = …
Ligne 4              for k in range (1, n+1) :
Ligne 5                   S2 = …
Ligne 6               return S2
```

4) On suppose maintenant que l'entier n est quelconque. On cherche une expression de la somme
$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$
en s'inspirant de la méthode de la question **2).**

a) Donner, sans calcul, la valeur de la somme :
$$T(n) = (2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + \cdots + ([n+1]^3 - n^3).$$

b) En développant $(k+1)^3 - k^3$, exprimer $T(n)$ en fonction de $S_1(n)$ et $S_2(n)$.

c) Prouver alors que : $S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5) Soit n un entier strictement positif.

a) En s'inspirant des questions précédentes, calculer la somme :
$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

b) Démontrer que : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

6) De façon générale, cette méthode permet de calculer, pour toutes valeurs entières de p et de n, la somme
$$S_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$$

Ecrire une fonction Python Somme (p, n) qui renvoie la somme ci-dessus.

Que vaut Somme (*4,10*) ?

Exercice 3 (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Polygones réguliers et pentalpha

Dans tout l'exercice, toutes les mesures des angles seront données en degré.

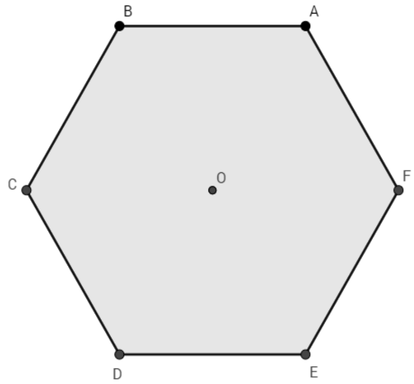
Partie I : polygones réguliers

Rappel : Un polygone régulier est un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et dont tous les angles ont la même mesure. Il existe un cercle passant par tous les sommets d'un polygone régulier ; on l'appelle le cercle circonscrit au polygone régulier. Le centre O de ce cercle est appelé le centre du polygone régulier.

1) Donner le nom du polygone régulier à 3 côtés. À 4 côtés.

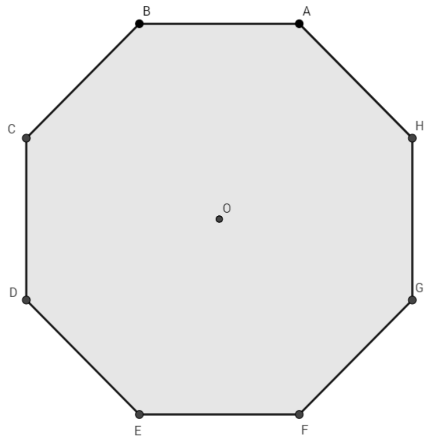
On considère un entier naturel non nul n et un polygone régulier à n côtés.

2) On se place dans le cas où n = 6.



- **a)** Quel est le nom de ce polygone régulier ABCDEF ?
- **b)** Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ appelé angle au centre ? De l'angle $\widehat{ABO}$?
- **c)** Dans le cas où AO = 0,5 dm, quelle est la longueur AB ?
- **d)** Quel est le périmètre *P* de ABCDEF ?

3) On se place dans le cas où n = 8.



- **a)** Quel est le nom de ce polygone régulier ?
- **b)** Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$? De l'angle $\widehat{ABO}$?
- **c)** Dans le cas où AO = 0,5 dm, quelle est la longueur AB en dm (arrondir au millième) ?
- **d)** Quel est le périmètre *P* de ABCDEF en dm (arrondir au millième) ?

4) On fixe un entier $n \geq 3$. On considère un polygone régulier à n côtés, dont le rayon du cercle circonscrit mesure 0,5 dm.

- **a)** Quelle est la mesure de l'angle au centre ?
- **b)** Écrire un algorithme donnant en sortie le périmètre *P* du polygone régulier en fonction du nombre de côtés *N* pour *N* variant de 3 à 50.

c) Compléter le tableau suivant (arrondir au millième) :

n	3	5	6	8		10	12	25	50
P									

d) Que remarquez-vous concernant la valeur du périmètre *P* lorsque *n* devient de plus en plus grand ? Expliquer cette conjecture.

Partie II : pentalpha

1)

a) Construire un pentagone régulier ABCDE de centre O et de côté de longueur 1 dm, en détaillant vos calculs et construction.

b) Tracer les diagonales [AC], [AD], [BE], [BD] et [CE]. Nommer F le point d'intersection des segments [EB] et [AD]. L'étoile à 5 branches ainsi formée est appelée pentalpha.

2)

a) Calculer les mesures des angles $\widehat{EBD}$, $\widehat{FDE}$ et $\widehat{BDF}$.

b) Justifier que $\frac{EB}{ED} = \frac{ED}{EF}$.

c) On note l = EB. Exprimer EF en fonction de l.

d) En déduire, à partir des deux derniers résultats, que $EB = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.