OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

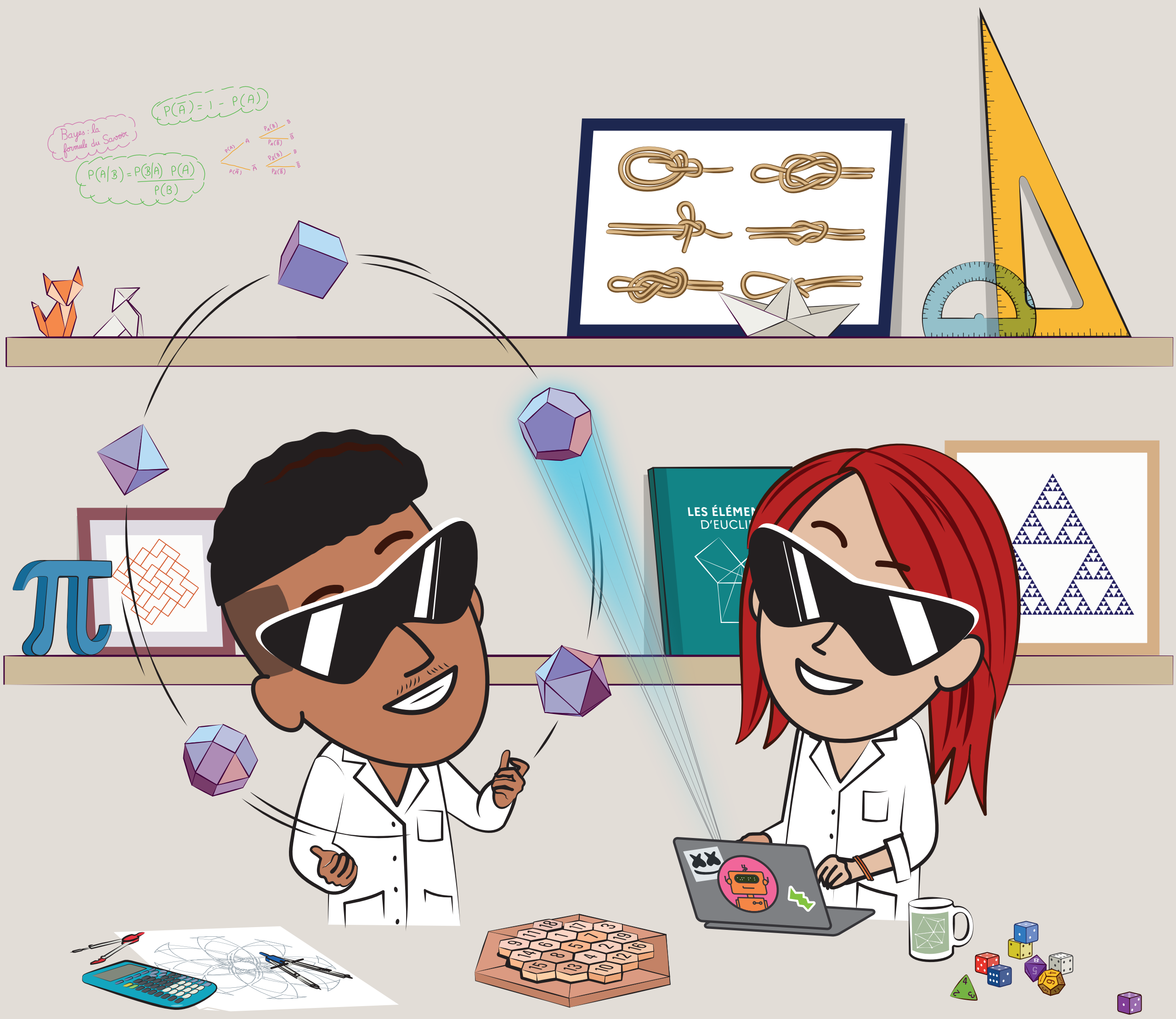
ACADÉMIE DE BORDEAUX 2023

SUJET DE L'ÉPREUVE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE

Liberté
Égalité
Fraternité

OLYMPIADES NATIONALES 2023
DE MATHÉMATIQUES



Épreuve le mercredi 15 mars 2023 (le 14 en Polynésie française). 4 exercices en 4 heures.
Palmarès national et académiques, en individuel et par équipes mixtes (de 2, 3 ou 4), selon cursus (technologique, général, général spécialité mathématiques).
Inscriptions auprès de vos professeurs de mathématiques jusqu'au 17 février 2023.

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2023

Métropole – La Réunion – Mayotte

Europe – Afrique –Orient – Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les copies et les énoncés sont ramassés et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices nationaux (2h)

- **Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité** de mathématiques doivent traiter les exercices nationaux 1 et 2.

- **Tous les autres candidats** (ceux de la voie générale n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et ceux de la voie technologique) doivent traiter les exercices nationaux 1 et 3.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre.

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Exercice 1 (tous les candidats)

PLUS FORT !

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Un joueur dispose de n cartes numérotées de 1 à n. Il les mélange puis note dans l'ordre la suite des numéros des cartes obtenue. On appelle *liste* la suite des numéros ainsi observés.
Le nombre n sera appelé *longueur* de la liste.
Par exemple, avec $n = 8$, une liste possible est $L = [2,5,7,6,1,8,4,3]$.
Avec une liste donnée, le joueur marque un point chaque fois que le numéro d'une carte est supérieur à celui de la carte précédente.
Par exemple avec la liste $L = [2, \mathbf{5}, \mathbf{7}, 6,1, \mathbf{8}, 4,3]$, le joueur marque 3 points.
On appelle *score* le nombre de points marqués par le joueur. Le score précédent est donc 3.

1. Quelques exemples

a. Donner un autre exemple de liste de longueur 8 et de score 3.
b. Donner toutes les listes de longueur 3 possibles ainsi que les scores correspondants.

2. Écrire sur votre copie la syntaxe d'une fonction Python qui, prenant en argument une liste L et sa longueur n, renvoie le score de la liste L.

On revient au cas général ainsi qu'à des considérations théoriques.
3. Démontrer que tout score est compris entre 0 et $n - 1$. Donner une liste dont le score vaut 0 et une liste dont le score vaut $n - 1$.
4. Soit k un entier compris entre 1 et $n - 2$.
a. Démontrer qu'il existe une liste de longueur n et de score k.
b. Peut-on trouver deux listes de longueur n et de score k ?

On note désormais $L_n(s)$ le nombre de listes de longueur n et de score s.
5. Déterminer $L_n(0)$ et $L_n(n - 1)$.
6. ***Une relation de récurrence***
a. Déterminer $L_3(0), L_3(1)$ et $L_3(2)$. Comment insérer dans la liste $[3,1,2]$ la carte portant le numéro 4 pour obtenir une liste dont le score vaut encore 1 ?
b. Comment insérer dans la liste $[3,2,1]$ la carte portant le numéro 4 pour obtenir une liste dont le score reste nul ?
c. Vérifier que $L_4(1) = 2L_3(1) + 3L_3(0)$.
d. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$,

$$L_{n+1}(1) = 2L_n(1) + nL_n(0).$$

e. Pour tout n et pour tout entier naturel k non nul, exprimer $L_{n+1}(k)$ à l'aide de $L_n(k)$ et $L_n(k - 1)$.
f. Dresser un tableau des valeurs de $L_n(k)$ pour $n \in \{3, 4, 5\}$ et $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Exercice 2 (candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

UNE DESCENTE INFINIE

Dans tout l'exercice, α désigne un entier naturel supérieur ou égal à 4.

On considère l'équation (E) ci-dessous dont l'inconnue est le triplet d'entiers relatifs $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3$.

$$\text{(E)} : \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha x_1 x_2 x_3$$

Le but de l'exercice est de démontrer que le seul triplet dans $\mathbf{Z}^3$ solution de (E) est $(0,0,0)$.

Partie 1

Soient b et c deux réels. On considère la fonction polynôme P de **R** dans **R** définie par $P(x) = x^2 + bx + c$. Un réel r tel que $P(r) = 0$ est appelé *racine* de P. On suppose dans cette partie que P admet deux racines distinctes, r_1 et r_2. Ainsi, $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)$ pour tout réel x.

1. Exprimer b et c en fonction de r_1 et r_2.

2. On suppose ici $b \leq 0$ et $c \geq 0$
Que peut-on dire du signe de r_1 et r_2 ?

Partie 2

1. ***a.*** On suppose que le triplet $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3$ est solution de l'équation (E). Montrer que $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ est aussi solution de l'équation (E).

b. En déduire que, s'il existe un triplet d'entiers relatifs différent de $(0,0,0)$ solution de l'équation (E), alors il existe un triplet d'entiers naturels différent de $(0,0,0)$ solution de l'équation (E).

2. Si le triplet $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3$ est solution de l'équation (E), que dire du triplet (x_2, x_1, x_3) ?

3. En déduire que, si l'équation (E) admet une solution dans $\mathbf{Z}^3$ différente du triplet $(0,0,0)$, alors elle admet une solution (x_1, x_2, x_3) dans $\mathbf{N}^3$ différente du triplet $(0,0,0)$ et telle que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

Partie 3

On suppose donc dans cette partie qu'il existe un triplet d'entiers naturels (x_1, x_2, x_3) différent de $(0,0,0)$ solution de (E) et tel que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. On fixe un tel triplet.

1. Démontrer que $x_1 > 0$.

2. On définit la fonction Q de **R** dans **R** par $Q(x) = x^2 - \alpha x_1 x_2 x + x_1^2 + x_2^2$.
Un réel r tel que $Q(r) = 0$ est appelé *racine* de Q.

a. Soit y un réel. Montrer que (x_1, x_2, y) est solution de (E) si, et seulement si, y est une racine de Q.

b. Indiquer une première racine de Q à partir des données de l'énoncé.

c. Vérifier que $Q(x_2) = (3 - \alpha x_1)x_2^2 + (x_1^2 - x_2^2)$ et en déduire que $Q(x_2) < 0$.

d. Quel est le signe de $Q(0)$?

e. Démontrer que Q a deux racines distinctes : celle donnée précédemment et une autre notée y ; ranger dans l'ordre croissant les nombres $0, x_2$ et x_3 et y et justifier qu'ils sont tous distincts.

f. Montrer que (x_1, x_2, y) est un triplet d'entiers naturels solution de l'équation (E).

3. Que donne le raisonnement de la question 2 en remplaçant le triplet solution (x_1, x_2, x_3) par le triplet constitué de x_1, x_2, y rangés dans l'ordre croissant ?

4. Expliquer comment aboutir à une absurdité et conclure quant aux triplets d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

5. Démontrer le résultat suivant :
« Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}$ avec $\alpha > n \geq 2$.

L'équation $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \alpha x_1 \dots x_n$ d'inconnue $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n'admet pas de n-uplet d'entiers relatifs solution autre que $(0,0, \dots, 0)$. »

Exercice 3 (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

CODES DÉTECTEURS ET CORRECTEURS

Question préliminaire

1. Soient a et b deux nombres entiers.
Montrer que le nombre $a+b$ est pair si, et seulement si, a et b sont de la même parité.

Codage d'un message

Un *message* est ici un nombre M codé sous la forme d'un quadruplet (x_1, x_2, x_3, x_4) où x_1, x_2, x_3 et x_4 sont des « bits », c'est-à-dire des nombres ne pouvant valoir que 0 ou 1. Le nombre M que représente le quadruplet (x_1, x_2, x_3, x_4), appelé aussi demi-octet *d'information*, vaut par définition :

$$M = x_1 + 2 \times x_2 + 4 \times x_3 + 8 \times x_4$$

Par exemple, le code $(0,0,1,1)$ représente le nombre $M = 12$ puisque $12 = 0 + 2 \times 0 + 4 \times 1 + 8 \times 1$.

2. ***a.*** Quel est le message M que code le quadruplet $(1,0,0,1)$?
b. Trouver un code qui représente $M = 10$. Trouver un code qui représente $M = 15$.
c. Peut-on trouver un code pour représenter $M = 20$?
d. Quels sont les différents messages possibles ?

Un message est parfois altéré (on dit aussi « corrompu ») lors de sa transmission du fait d'un matériel défectueux ou de signaux parasites. Des erreurs modifient des bits, un 0 se transformant en 1 ou un 1 se transformant en 0. Aussi des techniques permettant de détecter et de corriger ces anomalies ont-elles été mises au point. Ceci fait l'objet de la suite.

Codage d'un message avec protection contre les erreurs

3. ***Principe du bit de parité***

Le code (x_1, x_2, x_3, x_4) est transformé en le quintuplet (x_1, x_2, x_3, x_4, y), dont le dernier bit y, dit de *parité*, vaut 0 si la somme $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ est paire, et 1 si elle est impaire. C'est ce quintuplet qui est transmis, il représente le même message M que le code (x_1, x_2, x_3, x_4), à savoir $M = x_1 + 2 \times x_2 + 4 \times x_3 + 8 \times x_4$. Les bits dits d'information demeurent x_1, x_2, x_3, x_4 et le bit de parité, y, est transmis avec les plus grandes précautions.
Par exemple, pour transmettre le nombre $M = 12$ correspondant à $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ et $x_4 = 1$, on calcule d'abord $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$, qui est pair ; on pose donc $y = 0$ et on émet le quintuplet $(0,0,1,1,0)$.

a. Quel est le bit y de parité associé au quadruplet $(1,0,0,1)$ codant le nombre $M = 9$ à l'émission ?
b. On reçoit le quintuplet $(1,1,0,1,0)$ dont on suppose le bit de parité (le cinquième, donc) fiable. Justifier que l'information véhiculée par le code a été corrompue.
c. Si on est sûr du bit de parité, peut-on détecter une altération, et peut-on la localiser
- dans le cas où un seul bit d'information est faux à l'arrivée ?
- dans le cas où deux bits d'information sont faux à l'arrivée ?

4. ***Principe des bits de contrôle***

Le code (x_1, x_2, x_3, x_4) est transformé en l'heptuplet $(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3)$, où
$y_1 = 0$ si $x_1 + x_2 + x_3$ est pair, $y_1 = 1$ sinon ; $y_2 = 0$ si $x_2 + x_3 + x_4$ est pair, $y_2 = 1$ sinon ; $y_3 = 0$ si $x_1 + x_3 + x_4$ est pair, $y_3 = 1$ sinon. Les bits dits d'information demeurent x_1, x_2, x_3, x_4.
L'heptuplet $(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3)$ code toujours le message $M = x_1 + 2 \times x_2 + 4 \times x_3 + 8 \times x_4$.

a. Quels sont les bits y_1, y_2, y_3, dits de *contrôle*, associés au quadruplet $(1,0,0,1)$ codant le nombre $M = 9$?
b. Pourquoi est-on certain que l'heptuplet reçu $(1,1,0,1,0,0,1)$ résulte d'une altération de transmission dans le cas où on est sûr des bits de contrôle ?
c. Si on est sûr de la justesse des bits de contrôle, dans l'hypothèse où exactement un des quatre bits d'information est erroné, pourquoi peut-on détecter qu'il y a eu une altération et pourquoi peut-on la localiser (et donc la corriger) ? Peut-on détecter l'erreur quand exactement deux des quatre bits d'information sont erronés ?

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades académiques de mathématiques 2023

BORDEAUX

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les copies et les énoncés sont ramassés et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2h)

- **Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité** de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.

- **Tous les autres candidats** (ceux de la voie générale n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et ceux de la voie technologique) doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

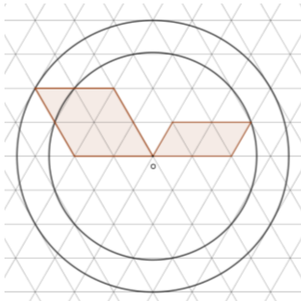
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre.

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Exercice 1 (tous les candidats)

Des cercles sur un réseau triangulaire



Sur la figure ci-contre, on a représenté un réseau triangulaire dont les mailles sont des triangles équilatéraux de côté 1. Le point O est un nœud du réseau.

On s'intéresse aux rayons R des cercles de centre O qui passent par un nœud du réseau.

On peut alors observer que ces réels sont soit des entiers, soit les mesures des diagonales d'un parallélogramme dont les mesures des côtés sont des entiers et l'un des angles mesure 60°.

Il est facile de démontrer que $R^2 = a^2 - ab + b^2$ où a et b sont des entiers relatifs.

On désigne par E l'ensemble des nombres entiers relatifs N qui peuvent s'écrire sous la forme $a^2 - ab + b^2$ où a et b sont des entiers relatifs. On dira alors que (a, b) est un représentant de N et on écrira $N = N(a, b) = a^2 - ab + b^2$.

1. ***a.*** Vérifier que $(7,12)$ est un représentant de 109.
   b. Existe-t-il un autre représentant de 109 comportant l'entier 12 et pas l'entier 7 ?
   c. Déterminer un représentant de 7.

2. Justifier que si (a, b) est un représentant de N alors (b, a)et $(-a, -b)$ sont aussi des représentants de N.

3. ***a.*** Montrer que, quels que soient les entiers a, b et k, $N(ka, kb) = k^2 N(a, b)$.
   b. En remarquant que $2023 = 7 \times 17^2$, déterminer deux entiers a et b tels que $N(a, b) = 2023$.

4. Soient N et M deux entiers de E ayant pour représentants respectifs (a, b) et $(-a, b)$. Donner un représentant de $N \times M$.

5. ***a.*** Montrer que si a et b sont pairs alors $N(a, b)$ est un multiple de 4.
   b. Montrer que si l'un au moins des entiers a et b est impair alors $N(a, b)$ est impair.
   c. 2022 a-t-il un représentant ?

6. ***a.*** Soit N un élément de E. Montrer que si (a, b) est un représentant de N alors $(b - a, b)$ est aussi un représentant de N.
   b. Trouver 8 représentants distincts de 2023.
   c. Justifier que si N appartient à E, on peut toujours trouver un représentant (a, b) de N tel que a et b sont tous deux positifs ou nuls et $a \leq b$.
   d. Justifier que si N appartient à E, on peut toujours trouver un représentant (a, b) de N tel que a ou b est pair.

7. Soit N un élément de E et (a, b) un représentant de N tel que $0 \leq a \leq b$.
   a. Montrer que $3b^2 \leq 4N \leq 4b^2$
   b. En déduire un encadrement de b en fonction de N.
   c. Déterminer un représentant de 849.

8. L'ensemble E contient-il trois entiers consécutifs ? On pourra s'intéresser au reste de la division euclidienne de $N(a, b)$ par 3.

Exercice 2 (candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Nombres de Smith[1]

Un nombre de Smith N est un nombre entier supérieur à 2, **non premier,** et dont la somme des chiffres, notée S(N), est égale à la somme des chiffres de ses facteurs premiers, notée $S_p(N)$.

Par exemple :

58 est un nombre de Smith car il n'est pas premier et :

$$S(58) = 5 + 8 = 13 \text{ et } 58 = 2 \times 29, \text{ donc } S_p(58) = 2 + 2 + 9 = 13.$$

27 est également un nombre de Smith car il n'est pas premier et :

$$S(27) = 2 + 7 = 9 \text{ et } 27 = 3 \times 3 \times 3 \text{ donc } S_p(27) = 3 + 3 + 3 = 9.$$

1. ***a.*** Montrer que les nombres 121 et 166 sont des nombres de Smith.
b. Est-ce que 2023 est un nombre de Smith ?

2. ***a.*** Montrer que si N est un nombre de Smith, alors $10N$ n'est pas un nombre de Smith.
b. Vérifier que 69 n'est pas un nombre de Smith mais que 690 l'est.
c. On suppose que $S(N) > S_p(N)$ et que $S(N) - S_p(N)$ est divisible par 7. Montrer qu'il existe un nombre entier naturel k non nul tel que 10^kN soit un nombre de Smith.

3. Montrer que pour tous les entiers m et n supérieurs à 2, $S_p(m\times n) = S_p(m) + S_p(n)$.

4. Soit R_n = 111……….1111 (un nombre composé de n chiffres 1, on les appelle les « repunits »).
Dans la suite du problème, n désigne un entier tel que R_n est premier (par exemple R_2 =11 est premier)
On appelle r le reste de la division euclidienne de n par 7.
Dans cette question, on considère que $r = 2$.
a. Exprimer $S(2\times R_n)$ et $S_p(2\times R_n)$ en fonction de n.
b. Montrer que, si $n > 2$, il existe un multiple de R_n divisible par 10 qui est un nombre de Smith (on ne demande pas de le trouver).

5. Dans cette question, il s'agit de démontrer que, quelle que soit la valeur de r, il existe un multiple de R_n, divisible par 10, qui soit un nombre de Smith.
a. Supposons que $r = 0$. Déterminer un nombre entier positif m non nul tel que $S(m\times R_n) - S_p(m\times R_n)$ soit divisible par 7.
b. Répéter la question précédente pour toutes les valeurs possibles de r *(Indication : on fera attention au fait que m n'est pas toujours un nombre premier…)*
c. Conclure.

6. **a.** On admet que R_{19} est premier. Montrer que $3304R_{19}$ est un nombre de Smith.

b. Montrer que pour tout R_n avec n>19, $3304R_n$ est un nombre de Smith.

---

[1] *D'après l'article : S. Oltikar and K. Wayland, Construction of Smith numbers, this MAGAZINE 56 (1983), 36-37.*

Exercice 3 (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Les déplacements du robot

Une rangée de cases supposée illimitée est numérotée par les nombres entiers successifs en commençant par 1. Un robot peut se déplacer sur cette rangée à partir de la position de départ.

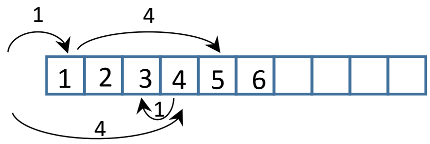
Départ	1	2	3	4	5	6	…																	

Les déplacements du robot sont régis par l'algorithme ci-dessous auquel on fournit une liste L d'entiers naturels distincts.

> Algorithme
>
> Tant que la liste L est non vide
>
> - Choisir au hasard un terme x de la liste L
> - Choisir au hasard le sens de déplacement (vers la droite ou vers la gauche si c'est possible)
> - Déplacer le robot de x cases dans le sens choisi
> - Supprimer l'entier x de la liste L

Un entier a est dit atteignable, s'il est possible que le robot se trouve sur la case a au bout d'un nombre fini de déplacements.

Par exemple : si la liste L est $(1{,}4)$, les cases 1 et 4 sont atteignables ainsi que les cases 3 et 5 en deux déplacements mais la case 2 n'est pas atteignable.



On dira que la liste L est efficace si le robot peut atteindre toutes les cases de 1 à S où S est la somme des termes de la liste L.

1. Quelques exemples
   a. Démontrer que les listes (1, 3) et (1, 3, 5) sont efficaces et que la liste (2, 3, 4) n'est pas efficace.
   b. La liste (1, 2, 4, 7) est-elle efficace ?

2. Soient a et b deux entiers tels que $3 < a < b$.
   a. Donner, en fonction de a, tous les numéros des cases atteignables avec la liste $(1{,}2, a)$.
   b. Quelle est la plus grande valeur de a telle que la liste $(1{,}2, a)$ est efficace ?
   c. Quelle est la plus grande valeur de b telle que la liste $(1{,}2{,}7, b)$ est efficace ?

3. Des listes efficaces de longueurs quelconques.
   a. La liste $(1{,}2{,}4{,}8{,}16)$ est-elle efficace ?
   b. Donner une liste de sept nombres entiers qui est efficace.
   c. Démontrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, il existe une liste de k nombres entiers qui est efficace.

4. Prolongement d'une liste efficace. Soit $L = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ une liste de k nombres entiers qui est efficace et S la somme de ces entiers.
   a. Démontrer que la liste $L' = (a_1, a_2, \dots, a_k, 2S + 1)$ est efficace.
   b. En déduire une liste de huit entiers telle que toutes les cases numérotées de 1 à 2023 sont atteignables.

5. Une majoration de la somme en fonction de la longueur.
   Soit $L = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ une liste de k nombres entiers qui est efficace et S la somme de ces entiers.
   a. Justifier que tout entier compris entre 1 et S est de la forme $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$ où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont égaux à -1, 0 ou 1.
   b. En déduire que
   $$S \leq \frac{3^k - 1}{2}$$

6. Quel est le plus petit nombre de termes d'une liste telle que toutes les cases de 1 à 2023 sont atteignables ?