OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE BORDEAUX
2022

SUJET DE L'ÉPREUVE

22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2022

EPREUVE ACADEMIQUE

Cette deuxième partie est constituée des exercices académiques. À son issue, les copies sont ramassées.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. **Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition**.

Cette deuxième partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

Jeu de chaises

Dix personnes portent un dossard numéroté de 1 à 10, chacune ayant un numéro différent.

De la même façon dix chaises ont un dossier numéroté de 1 à 10, chacune ayant un numéro différent.

Au départ chaque personne est assise sur la chaise portant le même numéro qu'elle.

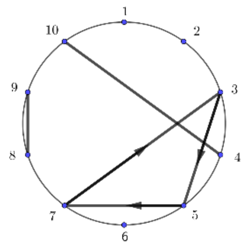
Sur chacune des chaises se trouve une enveloppe dans laquelle est indiqué un entier compris entre 1 et 10. Ces entiers sont tous différents et les enveloppes ont été réparties au hasard.

Au coup de gong, chaque personne ouvre l'enveloppe située sur sa chaise, regarde le nombre inscrit, repose l'enveloppe sur la chaise et se déplace jusqu'à celle qui porte sur son dossier le numéro qu'elle vient de lire dans l'enveloppe.

Voici un exemple de répartition $s:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 5 & 10 & 7 & 6 & 3 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ qui signifie que l'enveloppe située sur la chaise 1 contient le numéro 1, celle située sur la chaise 5 contient le numéro 7 …

Ceci constitue la **forme 1** de la répartition *s* que l'on peut représenter également ainsi :

forme 2 :



sur laquelle on trouve $\begin{cases} \text{. trois points fixes: 1,2 et 6} \\ \text{. deux clignotants :(4,10) et (8,9) .} \\ \text{. un cycle de longueur 3 :(3,5,7)} \end{cases}$

Remarque : Les flèches sont nécessaires pour le cycle alors qu'elles ne le sont pas pour les clignotants.

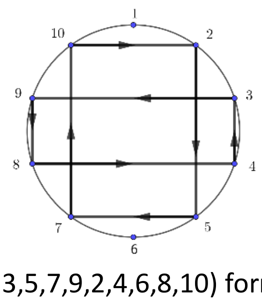
Ceci peut se résumer ainsi et constituer la **forme 3** de *s* : (1)(2) (6) (4,10) (8,9) (3,5,7).

Remarque $(3,5,7) = (5,7,3)$ mais $(3,5,7) \neq (3,7,5)$.

1. **a.** Donner les formes 2 et 3 pour la répartition

   $s_1:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 10 & 1 & 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

   b. Donner les formes 1 et 3 pour la répartition

   s_2 :

   c. Donner les formes 1 et 2 pour la répartition s_3 : (1,3,5,7,9,2,4,6,8,10) formée d'un seul cycle.

2. **a.** Quel est le nombre de répartitions possibles des enveloppes sur les chaises ?

   b. Quelle est la probabilité que la répartition des enveloppes sur les chaises soit formée d'un seul cycle ?

3. Au deuxième coup de gong, les personnes regardent à nouveau le numéro inscrit dans l'enveloppe située sur la chaise où ils sont arrivés et se dirigent vers celle portant le numéro indiqué…et ainsi de suite à chaque nouveau coup de gong. Si *s* désigne la répartition initiale, on notera s^2, s^3,…,les répartitions des personnes obtenues après le 2ème, le 3ème, …coup de gong.

a. Recopier et compléter le tableau suivant :

$$\begin{array}{c} \\ s \\ s^2 \\ s^3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 5 & 10 & 7 & 6 & 3 & 9 & 8 & 4 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

b. Justifier qu'il existe un entier *p* tel que la répartition s^p corresponde à ce que chaque individu se trouve sur la chaise portant le même numéro que lui (retour à la case départ).

c. Déterminer une répartition telle que s^{30} soit le premier retour à la case départ. On donnera la répartition sous la forme 3.

4. $E = \{1, 2, ..., n\}$. On appelle dérangement de *E* une répartition *s* des éléments de E n'ayant aucun point fixe et on note u_n le nombre de dérangements de E.

a. Déterminer u_2, puis montrer que $u_3 = 2$.

Soit *n* un entier supérieur ou égal à 4 et soit *s* un dérangement de *E*. $s : \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix}$

b. Justifier que a_1 est différent de 1.

c. Montrer que le nombre de dérangements de *E* tels que $a_1 = 2$ et $a_2 = 1$ est égal à u_{n-2}.

d. Déterminer le nombre de dérangements de *E* tels que $a_1 = 2$ et $a_2 \neq 1$.

e. Justifier que si $n \geq 4$, $u_n = (n-1)(u_{n-1} + u_{n-2})$ et calculer u_{10}.

Quelle est à 0.01 près la probabilité qu'après le premier coup de gong, aucune personne ne se retrouve sur la chaise portant le même numéro qu'elle ?

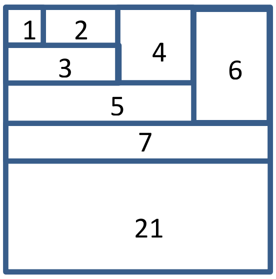
Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Partage d'un carré

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on désigne par K_n un carré de côté n.

Si k est un entier naturel supérieur ou égal à 2, on dira que K_n est k-décomposable si on peut partager le carré K_n en k rectangles à côtés entiers dont les aires sont toutes différentes. On notera $a_1, a_2, \dots a_k$ la liste strictement croissante des aires des rectangles d'un partage du carré K_n en k rectangles d'aires toutes distinctes.

Par exemple, le partage ci-contre montre que le carré K_7 est 8-décomposable.



1. Vérifier que K_3, K_4 et K_5 sont 3-décomposables. On donnera des partages correspondants.
   Pour $n \geq 3$, K_n est-il 3-décomposable ?
2. Justifier que K_4 est 4-décomposable et K_5 est 5-décomposable.
   Démontrer que pour tout entier $n \geq 3$, K_n est n-décomposable. On pourra étudier séparément le cas où n est impair et celui où n est pair.
3. Soient n et k deux entiers naturels tels que K_n est k-décomposable.
   - **a.** Justifier que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq \frac{k(k+1)}{2}$.
   - **b.** En déduire que $k(k+1) \leq 2n^2$.
4. Soit k un entier tel que K_6 est k-décomposable.
   - **a.** Démontrer que $k \leq 8$.
   - **b.** Justifier que les entiers $a_1, a_2, \dots a_k$ sont tous différents de 7, 11 et 13. En déduire que $k \leq 7$.
   - **c.** On suppose que $k = 7$.
     Démontrer que $a_1 = 1$ et $a_7 \leq 15$.

     Déterminer toutes les listes $a_1, a_2, \dots a_7$ possibles et pour chacune d'entre elles, donner une décomposition correspondante de K_6.
   - **d.** Quel est le plus grand entier k tel que K_6 est k-décomposable ?
5. Quel est le plus petit entier n tel que K_n est 10-décomposable ?

Quel est le plus grand entier k tel que K_8 est k-décomposable et chacune des aires $a_1, a_2, \dots a_k$ est un entier pair ?

Exercice 3 (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Cryptarithme

On appelle cryptarithme (ou cryptogramme) une opération mathématique dans laquelle certains chiffres (pas forcément tous) ont été remplacés par des lettres. Deux lettres différentes sont codées par deux chiffres différents (et réciproquement). Un nombre ne peut évidemment pas commencer par zéro.

Nous utiliserons les conventions d'écriture suivantes :

- Une écriture décimale comportant au moins deux symboles dont au moins une lettre est surlignée : ainsi $\overline{A3B}$ désigne le nombre dont A est le chiffre des centaines, 3 celui des dizaines, B celui des unités.
- Afin d'éviter toute confusion, les produits sont toujours désignés par le symbole $\times$: on peut ainsi distinguer nettement $\overline{3A}$ de $3 \times A$.

Exemple : $\overline{AB5B}$ représente un nombre de 4 chiffres qui peut valoir 1252 ou 3858 ou 5454 etc. Il ne peut pas valoir 9357 car dans ce cas B vaudrait 3 et 7.

Résoudre un cryptarithme revient à déterminer les différentes valeurs possibles pour chaque lettre utilisée permettant de vérifier l'égalité proposée.

1. Déterminer une valeur pour A, B et C telles que : 24× $\overline{AA}$ = $\overline{BAC}$
2. Plusieurs solutions possibles :
   a. Trouver une solution pour $\overline{LUI} + \overline{LUI} = \overline{EUX}$
   b. Trouver la plus petite et la plus grande valeur pour $\overline{EUX}$ vérifiant le cryptarithme précédent.

3. *La revue belge* **Sphinx**, *entièrement consacrée aux récréations mathématiques et logiques, fut fondée en 1931 par Maurice Kraitchik, spécialiste notoire de théorie des nombres. Cette revue connut un certain succès international jusqu'en 1939 mais périt victime de la guerre. C'est dans* **Sphinx** *que fut publié en mai 1931 le premier exemple de multiplication cryptée qui est donné ci-dessous :*

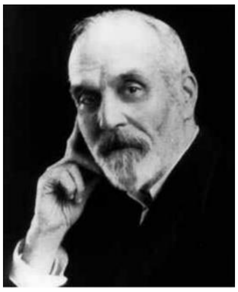
$$\begin{array}{r} ABC \\ \times\ DE \\ \hline FEC \\ DEC \\ \hline HGBC \end{array}$$

(Source : sesamath.net)

   a. En utilisant les égalités suivantes : $D \times \overline{ABC} = \overline{DEC}$ et $E \times \overline{ABC} = \overline{FEC}$, montrer que 100 divise $(D-E)\overline{BC}$.
   b. Montrer qu'alors $C = 0$ ou 5 et conclure que C vaut 5.
   c. Montrer que 4 divise $(D-E)$.
   d. Résoudre ce cryptarithme.

4. On considère le cryptarithme

$\overline{SEND} + \overline{MORE} = \overline{MONEY}$ (*casse-tête d'Henry Dudeney sorti* en 1924 *dans le* **Strand Magazine**, *la revue mensuelle qui publiait les aventures de Sherlock Holmes, photo : source : WIKIPEDIA)*.



a. Montrer que $\overline{MONEY} < 20000$ et en déduire que M est égal à 1.

b. Montrer que O est égal à 0.

c. Expliquer pourquoi alors $\overline{MORE} \leq 1098$ et $\overline{MONEY} \geq 10234$ et en déduire que $S = 9$.

d. Montrer que $\overline{END} + \overline{RE} = \overline{NEY}$ et en déduire que $N = E + 1$. Justifier que $D + \overline{RE} = Y + 90$ et conclure que $R = 8$.

e. Terminer la résolution du cryptarithme $\overline{SEND} + \overline{MORE} = \overline{MONEY}$.