OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE BORDEAUX 2021

SUJET DE L'ÉPREUVE

21e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2021
Académie de Bordeaux

Mardi 23 mars 2021 de 13h 00 à 17 h 10

Pause de 15 h à 15 h 10

L'épreuve se déroule **en deux parties indépendantes** de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc **séparés et distribués** séparément à des moments différents.
La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. **Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.**

La première partie de l'épreuve contient trois exercices.
Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices nationaux 1 et 2.
Les autres candidats doivent traiter les exercices nationaux 1 et 3.

La deuxième partie de l'épreuve contient trois exercices.
Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2 (*Un sur deux et Nuage bleu*).
Les autres candidats doivent traiter les exercices académiques 1 et 3 (*Un sur deux et Produit de chiffres*)**.**

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

$1^{ère}$ Partie – 13h à 15h
Exercices nationaux

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

Nombre de diviseurs, somme des diviseurs d'un entier

On rappelle qu'un nombre entier m est un multiple d'un nombre entier d s'il existe un nombre entier q tel que $m = dq$. Dans ce cas, on dit aussi que d est un diviseur de m. Ce vocabulaire ne s'utilise que pour les nombres entiers. Dans la suite, on ne considérera que les diviseurs positifs d'un entier n.

1. Quels sont les diviseurs de 6 ? Quels sont les diviseurs de 101 ? Quels sont les diviseurs de 361 ? Quels sont les diviseurs de 2 021?
2. Quelle est la somme des diviseurs de 6? Quelle est la somme des diviseurs de 101 ? Quelle est la somme des diviseurs de 361 ? Quelle est la somme des diviseurs de 2 021 ?

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note $N(n)$ le nombre des diviseurs de n, et $S(n)$ la somme des diviseurs de n.
3. Pour chacun des nombres 6, 101, 361, 2 021, vérifier l'inégalité :

$$2S(n) \leq (n+1)N(n)$$

4. À tout diviseur d d'un entier n non nul on associe l'entier q tel que $n = dq$. Si les diviseurs de n sont $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{N(n)-1}, n$, on note respectivement $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{N(n)-1}, 1$ les nombres qui leur sont associés au sens défini ci-dessus.
a. Évaluer la somme $T(n) = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{N(n)-1} + n + q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_{N(n)-1} + 1$
b. Si a et b sont des nombres supérieurs ou égaux à 1, montrer que :

$$a + b \leq ab + 1$$

c. En déduire, pour des nombres d et q tels que $dq = n$, l'inégalité

$$d + q \leq n + 1$$

d. En déduire finalement que l'inégalité

$$2S(n) \leq (n+1)N(n)$$

est réalisée pour tout entier naturel n non nul.

5. ***a.*** Avec les notations employées ci-dessus, montrer que l'égalité

$$2S(n) = (n+1)N(n) \quad (*)$$

n'est réalisée que si, pour chacun des diviseurs d de n, l'égalité $d + q = n + 1$ est réalisée.

b. En déduire que seuls 1 et les nombres premiers peuvent satisfaire l'égalité (*)

c. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Entiers N − décomposables

On donne un entier N supérieur ou égal à 1.
On dit qu'un entier naturel k est N −décomposable s'il existe des entiers naturels q et r tels que :

$$(S) \quad \begin{cases} k = q + r \\ k^2 = qN + r \end{cases}$$

Par exemple, le nombre 5 est 21 −décomposable, puisque $\begin{cases} 5 = 1 + 4 \\ 5^2 = 1 \times 21 + 4 \end{cases}$; le nombre 28 est 64 −décomposable, puisque $\begin{cases} 28 = 12 + 16 \\ 28^2 = 12 \times 64 + 16 \end{cases}$

A. Quelques exemples

1. ***a.*** Le nombre 7 est-il 22 −décomposable ? Est-il 10 −décomposable ?
b. Le nombre 45 est-il 100 −décomposable ?

2. ***a.*** Justifier qu'il y a exactement deux nombres 1 −décomposables.
b. Justifier qu'il y a exactement trois nombres 2 −décomposables.

3. Soit N un entier supérieur ou égal à 1.
a. Le nombre N est-il N −décomposable ?
b. Prouver que $N - 1$ est N −décomposable.
c. Prouver que si $N \geq 4$, alors 2 n'est pas N −décomposable.

B. Une étude des nombres N −décomposables

Soit N un entier supérieur ou égal à 1.
1. ***a.*** Prouver que si k est N −décomposable, alors $0 \leq k \leq N$.
b. Quels sont les entiers 3 −décomposables ? Quels sont les entiers 4 −décomposables ?

2. Prouver que si $N \geq 2$ et si k est N −décomposable, alors il existe un unique couple (q, r) d'entiers vérifiant le système (S).
3. ***a.*** Soit k un nombre N −décomposable. Justifier qu'il existe un entier q compris entre 1 et k tel que k soit solution de l'équation $x^2 - x - q(N-1) = 0$.
b. Prouver que, réciproquement, si k est un entier naturel et qu'il existe un entier q compris entre 1 et k tel que k soit solution de l'équation $x^2 - x - q(N-1) = 0$, alors k est N −décomposable.
c. Soit p un entier supérieur ou égal à 1. Prouver que le nombre $2^{p-1}(2^p - 1)$ est 2^{2p} −décomposable.

4. Prouver que si k est N −décomposable, alors $N - k$ est N −décomposable.

5. Dans cette question, on suppose que N est pair et que $N \geq 4$. Prouver que $\frac{N}{2}$ n'est pas N −décomposable.

6. Justifier que, pour tout $N \geq 3$, il y a un nombre pair d'entiers N −décomposables.

7. Dans cette question, on suppose que $N - 1$ est un nombre premier. Déterminer tous les entiers N −décomposables.

8. On donne un entier k supérieur ou égal à 2. Prouver qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers N tels que k soit N −décomposable.

Exercice 3 (à traiter par les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Fractions et pyramides égyptiennes

Pour représenter des nombres rationnels, dans l'Egypte antique, les lettrés utilisaient des inverses de nombres entiers naturels, qu'on appelle *fractions égyptiennes* (par exemple $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{42}$ sont des fractions égyptiennes).

1. Déterminer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.
a. La somme de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.
b. Le produit de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.
c. Le quotient de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.

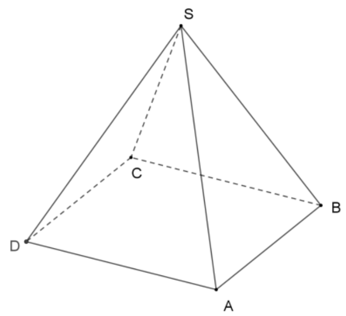
2. On souhaite écrire un nombre rationnel strictement compris entre 0 et 1 comme somme de fractions égyptiennes de dénominateurs tous différents. On dit alors qu'on a effectué une *décomposition égyptienne* du nombre rationnel.
Par exemple,

- $x = \frac{9}{20}$ a pour décomposition égyptienne $x = \frac{9}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.

- $x = \frac{1}{8}$ est déjà une décomposition égyptienne.

On admet que tout nombre rationnel strictement compris entre 0 et 1 admet une telle décomposition.
a. Donner deux décompositions égyptiennes de $\frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire sur l'unicité de la décomposition égyptienne d'un nombre rationnel x tel que $0 < x < 1$?
b. Donner une décomposition égyptienne de $\frac{2}{5}$ puis de $\frac{9}{10}$.

3. On appelle *pyramide égyptienne* une pyramide régulière à base carrée dont les faces sont des triangles isocèles, non équilatéraux, telle que :
- les longueurs des arêtes sont des fractions égyptiennes ;
- la somme des longueurs des arêtes de la pyramide est une fraction égyptienne.



a. Montrer que la pyramide régulière $SABCD$ à base carrée ci-contre, telle que $\mathrm{AB} = \frac{1}{30}$ et $\mathrm{SA} = \frac{1}{20}$, est une pyramide égyptienne

Dans la suite de cette question, on considère une pyramide régulière $SABCD$ à base carrée de sommet S dont les faces latérales sont des triangles isocèles non équilatéraux et dont les longueurs AB et SA sont des *fractions égyptiennes*.
Il existe donc deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\mathrm{AB} = \frac{1}{p}$ et $\mathrm{SA} = \frac{1}{q}$ et on suppose que $p > q$.
b. Justifier que si cette pyramide est une pyramide égyptienne alors $p \geq 4$ et $q \geq 4$.

c. Montrer que cette pyramide est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul n tel que $n = \frac{pq}{4p+4q}$.

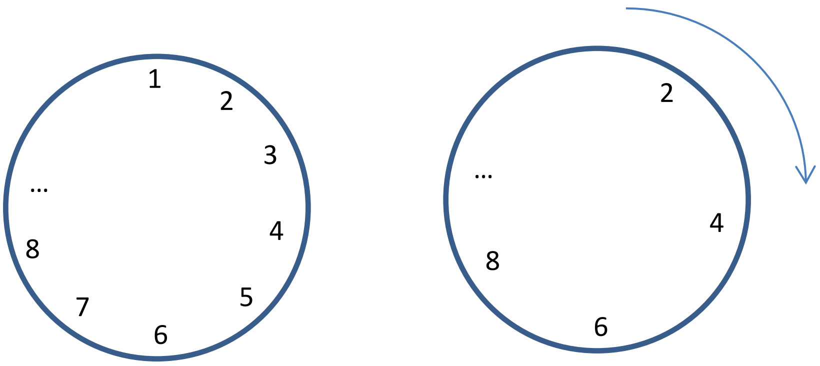
d. En déduire que si p et q sont des nombres impairs, alors cette pyramide SABCD ne peut pas être une pyramide égyptienne.

2ème Partie – 15h10 à 17h10
Exercices académiques

Exercice académique 1 (à traiter par tous les candidats)

Un sur deux

On a placé dans l'ordre les nombres de 1 à n sur un cercle dans le sens des aiguilles d'une montre. En parcourant, éventuellement plusieurs fois, ce cercle dans le sens des aiguilles d'une montre, on efface un nombre sur deux : on efface le numéro 1 puis le numéro 3 … jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un seul nombre. Le nombre restant est noté $f(n)$.



1. Vérifier que $(10) = 4$. À chaque étape, on dressera la liste ordonnée des nombres restants en commençant par le prochain à effacer : après avoir effacé 1, il reste 3, 4, 5, 6, 7 , 8 , 9, 10, 2 ; après avoir effacé 3, il reste 5, 6, 7, 8, 9, 10, 2, 4 ; etc.

2. Déterminer $f(n)$ pour chaque valeur de n comprise entre 2 et 9.

3. On considère les deux programmes Python suivants :

def Listesuivante(L) :
    del L[0]
    L.append(L[0])
    del L[0]
    return L
	def Unsurdeux(n) :
	    L=[]
	    for i in range(1,n+1) :
	        L.append(i)
	    …

Que fait le programme « Listesuivante(L) » lorsqu'on l'applique à une liste L d'au moins deux nombres ?
Recopier et compléter le programme « Unsurdeux(n) » pour qu'il affiche le nombre $f(n)$ lorsque $n \geq 2$.

4. $f(n)$ peut-il être un entier impair ?

5. Emettre une conjecture sur la valeur de $f(n)$ lorsque n est une puissance de 2 et vérifier que cette conjecture est vraie pour $n = 16$.

6. On suppose dans cette question que $n = 19$.

a. Quel est le numéro rencontré après avoir effacé trois nombres ?

b. En déduire la valeur de $f(19)$.

7. Dans cette question, on suppose que n est pair et on pose $p = n/2$.

a. Après avoir effacé p nombres, quel est le prochain nombre qui sera effacé ?

b. En déduire que $f(n) = 2f(p)$.

8. Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on pose $u_k = f\left(2^k\right)$.

a. Démontrer que la suite (u_k) est une suite géométrique.

b. Exprimer u_k en fonction de k.

9. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par k_n le plus petit entier k tel que $2^k \geq n$.

Démontrer que $f(n) = 2n - 2^{k_n}$.

10. Calculer $f(2021)$.
11. Déterminer le plus petit entier n tel que $f(n) \geq 2021$.

Exercice académique 2 (à traiter par les candidats suivant la spécialité de mathématiques de voie générale)

Nuage bleu

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{E}$ un ensemble de n points du plan distincts deux à deux.
Pour tout segment $[AB]$ joignant deux points distincts A et B de l'ensemble $\mathcal{E}$, on colorie en bleu son milieu.
On désigne par $f(\mathcal{E})$ le nombre de points coloriés en bleu.

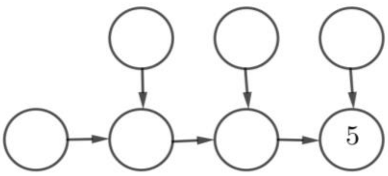
1. Déterminer toutes les valeurs possibles de $f(\mathcal{E})$ lorsque $n = 2$, $n = 3$ ou $n = 4$. On illustrera chaque cas par une figure.
On s'intéresse à la valeur maximale de $f(\boldsymbol{\mathcal{E}})$.
2.a. Justifier que $f(\mathcal{E}) \leq \frac{1}{2}n(n-1)$.
b. A quelle condition a-t-on $f(\mathcal{E}) < \frac{1}{2}n(n-1)$?
3. Soit Δ une droite de repère $(O, \vec{\imath})$ où O est un point du plan et $\vec{\imath}$ un vecteur non nul.
Pour $1 \leq r \leq n$, on note K_r le point d'abscisse 2^r et on désigne par $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des points K_r où $1 \leq r \leq n$.
On suppose qu'il existe deux segments distincts $[K_aK_b]$ et $[K_cK_d]$ ayant le même milieu et dont les extrémités appartiennent à $\mathcal{E}_1$.
Sans perte de généralité, on peut supposer que $a < b$, $c < d$ et $a \leq c$.
a. Démontrer que $2^a + 2^b = 2^c + 2^d$.
b. Etablir une contradiction.
c. En déduire $f(\mathcal{E}_1)$.
d. Quelle est la valeur maximale de $f(\boldsymbol{\mathcal{E}})$**.**
On va démontrer que la valeur minimale de $f(\boldsymbol{\mathcal{E}})$ est égale à $2n - 3$.
Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$ tels que AB est maximale. On désigne par X l'ensemble des segments d'extrémités A et un autre point de $\mathcal{E}$ et par Y l'ensemble des segments d'extrémités B et un autre point de $\mathcal{E}$ distinct de A et B.
4. On suppose qu'il existe un segment $[AC]$ de X et un segment $[BD]$ de Y tels que $[AC]$ et $[BD]$ aient le même milieu I.
a. Démontrer que $AC + BD \geq 2AB$.
b. En déduire une contradiction.
5. Quel est le nombre d'éléments de chacun des ensembles X et Y ?
En déduire que $f(\mathcal{E}) \geq 2n - 3$**.**
6. Soit Δ une droite de repère $(O, \vec{\imath})$ où O est un point du plan et $\vec{\imath}$ un vecteur non nul.
Pour $1 \leq r \leq n$, on note L_r le point d'abscisse $2r$ et on désigne par $\mathcal{E}_2$ l'ensemble des points L_r où $1 \leq r \leq n$.
a. Démontrer que $f(\mathcal{E}_2) = 2n - 3$.
b. Quelle est la valeur minimale de $f(\boldsymbol{\mathcal{E}})$?

Exercice académique 3 (à traiter par les candidats ne suivant pas la spécialité de mathématiques de voie générale)

Produit de chiffres

A tout entier *N* supérieur ou égal à 10 on associe par la fonction f l'entier *P* égal au produit des chiffres de *N*.
Ainsi $f(28) = 16$. On dit alors que 16 est **le fils** de 28 et que 28 est **un géniteur** de 16.
On écrit également $28 \to 16$.
On considère enfin la suite (u) définie par son premier terme u_0, entier supérieur ou égal à 10, et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
La suite s'arrête lorsque on ne peut plus calculer le terme suivant.
Ainsi si $u_0 = 77$, $77 \to 49 \to 36 \to 18 \to 8$. Le processus s'arrête puisque 8 est inférieur à 10.

1. Construire la suite (u) lorsque $u_0 = 2\ 677\ 889$.
2.a. Compléter le schéma suivant où les flèches représentent la fonction *f* et où les entiers inscrits dans les cercles ont 2 chiffres :



b. Déterminer tous les géniteurs à 3 chiffres de *N*=105.
c. Parmi eux quels sont ceux qui ont des géniteurs à 4 chiffres.
d. Déterminer un entier à 2021 chiffres, géniteur de *N*=105.
3. Soit $N = \overline{x_1 x_2 \dots \dots x_n}$, l'écriture de l'entier *N* dans le système décimal (x_1 est un entier compris entre 1 et 9, x_2 ,……., x_n désignent des entiers compris entre 0 et 9).
a. Justifier que $f(N) < x_1 \times 10^{n-1}$, puis que $f(N) < N$.

b. En déduire, que pour n'importe quelle valeur entière u_0 supérieure ou égale à 10, la suite (u) ne comporte qu'un nombre fini de termes.
4. La suite (u) débutant par 77 se termine par 8, on dira que 77 **atterrit dans la boite** *n*°8. On s'intéresse dans cette question aux entiers qui atterrissent dans une boîte de numéro impair.
a. Soit *N* l'un de ces entiers. Justifier que tous les chiffres de *N* sont impairs.
b. Soit *N* l'un de ces entiers ayant au moins un géniteur. Justifier que la décomposition de *N* en produit de facteurs premiers est de la forme $N = 3^p 5^q 7^r$ où *p, q, r* sont des entiers naturels.

Soit ***E*** l'ensemble des entiers naturels compris au sens large entre 10 et 9999. La liste **L** des entiers de ***E*** de la forme la forme $N = 3^p 5^q 7^r$ et n'ayant dans leur écriture décimale que des chiffres impairs est la suivante : 15, 35, 75, 135, 175, 315, 375, 735, 1575, 1715, 3375, 9375.

5.a. Donner trois nombres de ***E*** qui atterrissent dans la boîte *n*°1
b. Justifier que ce sont les seuls.
c. Combien d'éléments de ***E*** atterrissent dans la boîte *n*°3 ? *n*°7 ? *n*°9 ?
d. Dans quelle(s) boîte(s) peuvent atterrir des entiers comportant un 5 dans leur écriture.
e. Repérer dans la liste **L**, les éléments qui atterrissent dans la boîte *n*°5. En déduire le nombre d'éléments de ***E*** qui atterrissent dans la boîte *n*°5.