# OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
# LYCÉE, PREMIÈRE

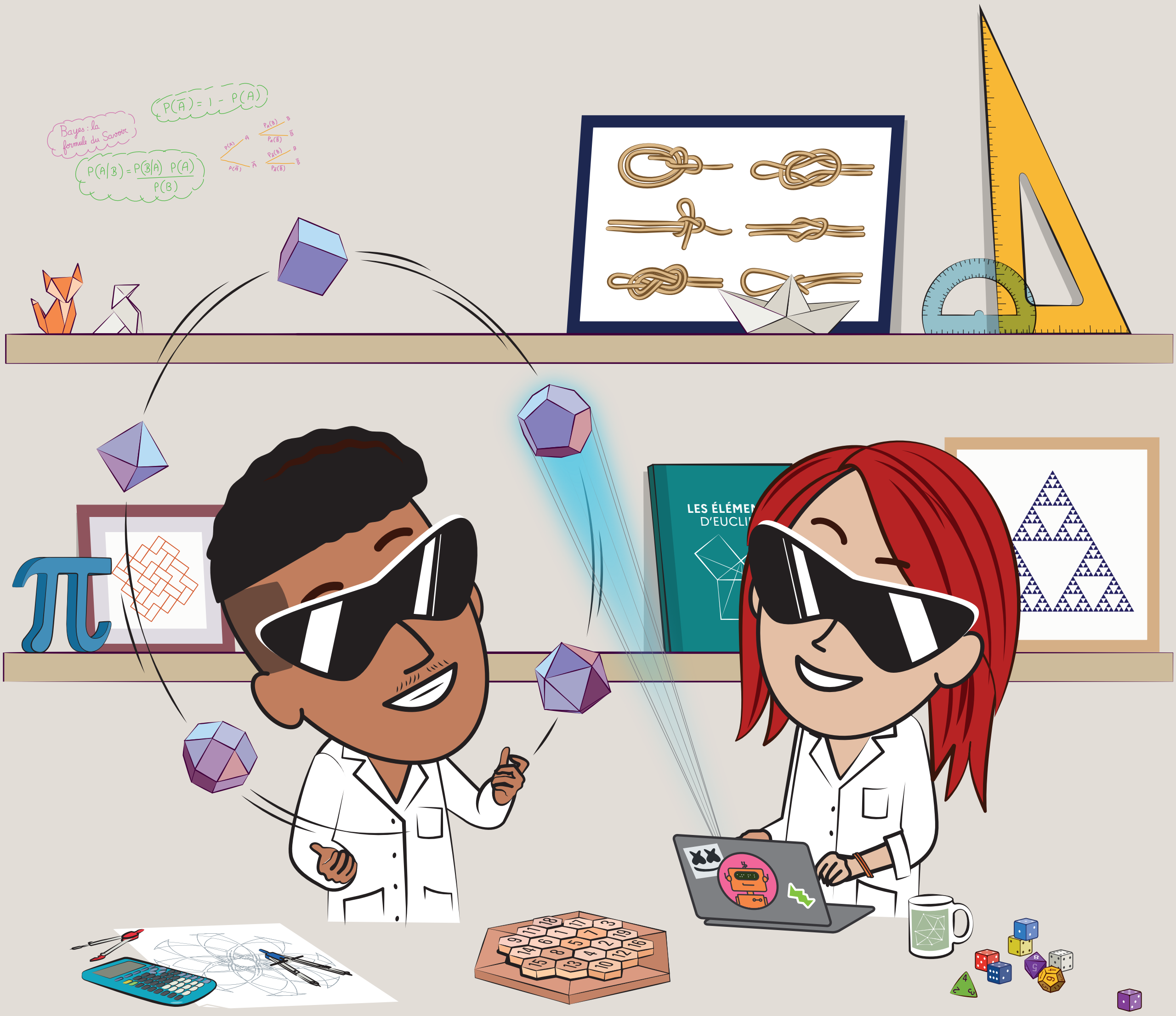
## ACADÉMIE DE BORDEAUX
## 2023

## CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE

*Liberté*
*Égalité*
*Fraternité*

# OLYMPIADES NATIONALES 2023
# DE MATHÉMATIQUES




**Épreuve le mercredi 15 mars 2023 (le 14 en Polynésie française). 4 exercices en 4 heures.**
**Palmarès national et académiques, en individuel et par équipes mixtes (de 2, 3 ou 4), selon cursus (technologique, général, général spécialité mathématiques).**
**Inscriptions auprès de vos professeurs de mathématiques jusqu'au 17 février 2023.**

**Exercice académique 1 :Des cercles sur un réseau triangulaire**

**1.a**. $N(7,12) = 49 - 84 + 144 = 109$.
**1.b.** $N(a, 12) = a^2 - 12a + 144 = 109$ équivaut à $a^2 - 12a + 35 = 0$ qui s'écrit $(a-6)^2 = 1$, ce qui donne $a - 6 = 1$ ou $a - 6 = -1$, soit $a = 7$ ou $a = 5$. Ainsi $N(5,12) = 109$.
**1.c.** $N(2,3) = 7$ donc $(2,3)$ est un représentant de 7.

**2.** $N(b,a) = b^2 - ba + a^2 = a^2 - ab + b^2 = N(a,b)$
et $N(-a,-b) = (-a)^2 - (-a)(-b) + (-b)^2 = a^2 - ab + b^2 = N(a,b)$.

**3.a.** $N(ka,kb) = (ka)^2 - (ka)(kb) + (kb)^2 = k^2a^2 - k^2ab + k^2b^2 = k^2(a^2 - ab + b^2) = k^2N(a,b)$.
**3.b.** $N(2,3) = 7$ donc $N(17 \times 2, 17 \times 3) = 17^2 \times 7$ d'où $N(34,51) = 2023$.

**4.** $N \times M = (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2) = (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = a^4 + a^2b^2 + b^4 = N(a^2, -b^2)$.
$(a^2, -b^2)$ est un représentant de $N \times M$.

**5.a**. Si $a$ et $b$ sont pairs, $a^2$, $ab$ et $b^2$ sont des multiples de 4 donc $N(a,b)$ est un multiple de 4.
**5.b.** Si $a$ est pair et $b$ est impair, $a^2$ et $ab$ sont pairs et $b^2$ est impair donc $N(a,b)$ est impair. Il en est de même si $a$ est impair et $b$ est pair car $N(a,b) = N(b,a)$.
**5.c.** 2022 n'a pas de représentant car 2022 est pair et n'est pas un multiple de 4.

**6.a.** $N(b-a,b) = (b-a)^2 - (b-a)b + b^2 = b^2 - 2ab + a^2 - b^2 + ab + b^2 = a^2 - ab + b^2 = N(a,b)$.
**6.b.** Compte tenu de 3.b, 2 et 6.a, $(34,51)$, $(51,34)$, $(-34,-51)$, $(-51,-34)$, $(17,51)$, $(51,17)$, $(-17,-51)$ et $(-51,-17)$ sont des représentants de 2023.
**6.c.** Il existe deux entiers relatifs $x$ et $y$, tels que $N = N(x,y) = N(y,x) = N(-x,-y) = N(-y,-x)$.
L'un des couples $(x,y)$, $(y,x)$, $(-x,-y)$, $(-y,-x)$ est tel que la deuxième coordonnées est supérieure ou égale $x$, $y, -x, -y$. En notant $(a_1, b)$ ce couple, on a $N = N(a_1, b)$ avec $a_1 \leq b$ et $b \geq 0$.
En posant $a = b_1 - a_1$, on a $N = N(a,b)$ avec $0 \leq a \leq b$.
**6.d.** En effet, si $a$ et $b$ sont impairs, on remplace $a$ par $b - a$ qui est pair.

**7.a.** $4N - 3b^2 = 4a^2 - 4ab + b^2 = (2a-b)^2 \geq 0$ donc $4N \geq 3b^2$.
$4N - 4b^2 = 4a^2 - 4ab = 4a(a-b) \leq 0$ car $a \geq 0$ et $a - b \leq 0$. Donc $4N \leq 4b^2$.

**7.b.** $N$ est positif car $4N \geq 3b^2 \geq 0$. On a aussi $4N \geq 3b^2$ donc $b^2 \leq 4\frac{N}{3}$ d'où $b \leq 2\sqrt{\frac{N}{3}}$.

Et $4N \leq 4b^2$ donc $b^2 \geq N$ d'où $b \geq \sqrt{N}$. D'où l'encadrement $\sqrt{N} \leq b \leq 2\sqrt{\frac{N}{3}}$.

**7.c** On cherche $a$ et $b$ tels que $0 \leq a \leq b$ et $N(a,b) = 849$.
On a alors $\sqrt{849} \leq b \leq 2\sqrt{\frac{849}{3}}$ donc $30 \leq b \leq 33$ car $b$ est un entier.
Pour $b = 30$, $N(a,b) = 849$ s'écrit $a^2 - 30a + 51 = 0$, équation qui n'a pas de solution entière.
Pour $b = 31$, $N(a,b) = 849$ s'écrit $a^2 - 31a + 112 = 0$, équation qui n'a pas de solution entière.
Pour $b = 32$, $N(a,b) = 849$ s'écrit $a^2 - 32a + 175 = 0$. On a $\Delta = 324 = 18^2$ donc $a = 7$ ou $a = 25$.
$(7,32)$ est donc un représentant de 849.

**8.** Si $a = 3q + r$ et $b = 3q' + r'$ où $0 \leq r \leq 2$ et $0 \leq r' \leq 2$, on a

$$N(a,b) = 9q^2 + 18qr + r^2 - 9qq' - 3qr' - 3q'r - rr' + 9q'^2 + 18q'r' + r'^2 = 3Q + N(r,r')$$

Donc $N(a,b)$ et $N(r,r')$ ont le même reste $R$ dans la division par 3.
Lorsque $r$ et $r'$ prennent les valeurs 0, 1, 2, $N(r,r')$ prend les valeurs 0, 1,4 donc $R = 0$ ou $R = 1$.
Si on prend 3 entiers consécutifs, l'un d'eux a pour reste 2 dans la division par 3. Il n'appartient donc pas à $E$.

**Exercice académique 2 : Nombres de SMITH**

1) a) 121 n'est pas premier car 121 = 11 x 11.
S(121) = 1 + 2 + 1 = 4. On a 121 = 11 x 11 donc $S_p(121)$ = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.
166 n'est pas premier car 166 = 2 x 83.
S(166) = 1 + 6 + 6 = 13. On a 166 = 2 x 83 donc $S_p(166)$ = 1 + 8 + 3 = 13.
Donc 121 et 166 sont bien des nombres de Smith.

b) Pour 2023 : S(2023) = 2 + 0 + 2 + 3 = 7. Et 2023 = 7 x 17 x 17 donc $S_p(2023)$ = 7 + 1 + 7 + 1 + 7 = 23. 2023 n'est pas un nombre de Smith.

2) a) Si N est un nombre de Smith, on a S(N) = $S_p(N)$.
On a alors S(10N) = S(N) puisqu'on ne rajoute qu'un 0 à la somme des chiffres.
Par contre, $S_p(10N)$ consiste à multiplier la décomposition en facteurs premiers de N par 2 et 5. Cela signifie que $S_p(10N)$ = S(N) + 2 + 5 = S(N) +7.
Donc S(10N) n'est pas un nombre de Smith.

b) S(69) = 6 + 9 = 15 et 69 = 3 x 23 d'où $S_p(69)$ = 3 + 2 + 3 = 8. Donc 69 n'est pas un nombre de Smith.
En multipliant 69 par 10, on a, selon ce qu'on a vu en 2a) : S(690) = S(69) = 15.
Et $S_p(690) = S_p(69)$ + 7 = 8 + 7 = 15.
690 n'est pas un nombre premier car 690 = 23 x 2 x 3 x 5.
Donc 690 est bien un nombre de Smith.

c) A chaque fois qu'on multiplie un nombre par 10, on ajoute 7 à $S_p$.
Si S(N) > $S_p(N)$, N n'est pas un nombre de Smith.
Notons k = $\frac{(S(N) - S_p(N))}{7}$ (qui est un entier naturel positif non nul, puisque S(N) – $S_p(N)$ est positif et divisible par 7).
On a alors $S(10^kN) = S(N)$ et $S_p(10^kN) = S_p(N) + 7k$.
Donc $S_p(10^kN) = S_p(N) \text{ x } 7\frac{(S(N) - S_p(N))}{7} = S_p(N) + S(N) - S_p(N) = S(N) = S(10^kN)$.
Donc $10^kN$ est bien un nombre de Smith.

3) On écrit les décompositions en nombres premiers de m et n.
m = $p_1$ $p_2$ ……… $p_s$
n = $p'_1$ $p'_2$ ……… $p_{s'}$
où $p_1$, $p_2$, ……… $p_s$, $p'_1$, $p'_2$ ……… $p'_s$ sont tous des nombres premiers (possiblement non distincts).
Donc par unicité de la décomposition en nombres premiers :
mn = $p_1$ $p_2$ ……… $p_s$ $p'_1$ $p'_2$ ……… $p'_s$.
La somme des chiffres de $S_p(mn)$ est donc bien la somme des chiffres des facteurs premiers de m et des chiffres des facteurs premiers de n.

4) a) $S(R_n)$ = n et $S_p(R_n)$ = n (puisque $R_n$ est premier).
On a clairement $S(2R_n)$ = 2n, puis $S_p(2R_n) = S_p(R_n) + S_p(2)$ = n + 2.

b) On vérifie d'abord que $S(2R_n) > S_p(R_n)$.
C'est-à-dire 2n > n +2, donc n>2, ce que nous avons par hypothèse.
Puis, comme r = 2, on peut écrire n = 7q + 2 où q est un entier positif.
On a alors 2n – (n+2) = n – 2 = 7q + 2 – 2 = 7q, donc $S_p(2R_n)$ - $S_p(R_n)$ est divisible par 7.
D'après la question 2c), cela signifie qu'il existe bien un nombre naturel k tel que $10^k$ x $2R_n$ soit un nombre de Smith. Ce nombre est bien divisible par 10.
*Remarque : Wayland et Oltikar ont ainsi trouvé que $10^{45}$ x $2R_{317}$ est un nombre de Smith !*

5) a) $S(mR_n) - S_p(mR_n) = S(mR_n) - S_p(m)S_p(R_n)$

On va d'abord chercher dans les cas les plus simples, où m est inférieur à 10.

On a alors $S(mR_n) = mn$ et $S_p(m)S_p(R_n) = S_p(m) + n$.

Or $r = 0$ donc on peut écrire $n = 7q$ avec $q$ un entier naturel.
Donc $S(mR_n) – S_p(mR_n) = 7mq – S_p(m) – 7q = 7q (m \quad – 1) – S_p(m)$.
Il suffit alors de prendre $S_p(m) = 7$ pour avoir $S(mR_n) – S_p(mR_n)$ multiple de 7.
Donc on peut choisir $m = 7$.

b) On écrit $n = 7q + r$, avec $q$ un entier naturel positif et $0 \le r < 7$.
D'où $S(mR_n) – S_p(mR_n) = (7q+r)m – S_p(m) – (7q+r)$.
$= 7qm – 7q + rm - S_p(m) – r$.
$= 7q (m – 1) + r(m-1) - S_p(m)$.

On doit donc essayer d'avoir $r(m-1) - S_p(m)$ nul ou un multiple de 7.

Pour $r = 1$ : $r(m-1) - S_p(m) = m - 1 – S_p(m)$.
Si $m$ était un nombre premier, on aurait $S_p(m) = m$ , donc $r(m-1) - S_p(m) = -1$. Cela ne conviendrait pas.
Par contre en choisissant $m = 6$, on a $S_p(6) = 5$ (puisque $6 = 2 \times 3$), on a bien $r(m-1) - S_p(m) = 6 – 1 – 5 = 0$.

Pour $r = 2$ : $r(m-1) - S_p(m) = 2m - 2 – S_p(m)$. Pour $m = 2$, $S_p(m) = 2$, et on a bien $2m – 2 – S_p(m) = 2 \times 2 – 2 – 2 = 0$.

Pour $r = 3$ : $r(m-1) - S_p(m) = 3m – 3 – S_p(m)$. Pour $m = 5$, $S_p(m) = 5$, et on a bien $3m – 3 – S_p(m) = 3 \times 5 – 3 – 5 = 7$.

Pour $r = 4$ : $r(m-1) - S_p(m) = 4m – 4 – S_p(m)$.
Si $m$ était un nombre premier, on aurait $S_p(m) = m$ , donc $r(m-1) - S_p(m) = 3m – 4$.
Aucune valeur de $m$ première ne permet d'obtenir un multiple de 7.
Ce n'est pas non plus possible pour toute autre valeur de $m$ inférieure à 10.
On revient donc à la formule : $S(mR_n) – S_p(mR_n) = S(mRn) – S_p(m)S_p(Rn)$.
On trouve en chercherchant (un peu… ) que pour $m = 14$, on a $S(14Rn) = 5n$, puis $S_p(m)S_p(Rn) = S_p(14) + n = 9 + n$.
Soit $S(mR_n) – S_p(mR_n) = 5n – 9 - n = 4n – 9 = 4(7q + 4) - 9 = 28 q – 7 = 7(4q – 1)$ qui est bien un multiple de 7.

Pour $r = 5$ : $r(m-1) - S_p(m) = 4S_p(m) – 5$. Pour $m = 3$, $S_p(3) = 3$, et on a bien $4m – 5 = 4 \times 3 – 5 = 7$.

Pour $r = 6$ : $r(m-1) - S_p(m) = 5S_p(m) – 6$. Pour $m = 4$, $S_p(4) = 4$, et on a bien $5m – 6 = 5 \times 4 – 6 = 14$.

c) On a montré pour toute valeur de $r$, et donc de $n$, $S(mR_n) – S_p(mR_n)$ est un multiple de 7 donc d'après 2), il existe un multiple de $R_n$ (premier), divisible par 10, qui soit un nombre de Smith.

6) a) On suppose $R_n$ premier.
On a $S_p(3304R_n) = S_p(3304) + S_p(R_n)$.
Or $3304 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 59$.
$2 + 2 + 2 + 7 + 5 + 9 = 27$.
Donc $S_p(3304R_n) = n + 27$.
Donc $S_p(3304R_{19}) = 46$.

Écrivons la suite des nombres des $3304R_n$ (premiers ou non).
$3304R_2 = 36344$
$3304R_3 = 366744$.
$3304R_4 = 3670744$.
$3304R_5 = 36710744$
$3304R_6 = 367110744$
…
…
$3304R_n = 367111……1110744$ ($n – 4$ « 1 » contenus dans le nombre).

Cela correspond à ajouter 1 en passant de $S(3304R_n)$ à $S(3304R_{n+1})$ (il faudrait le démontrer rigoureusement).
On en déduit que pour passer de $S(3304R_n)$ à $S(3304R_m)$, on ajoute m - n c'est-à-dire
$S(3304R_m) = S(3304R_n) + m - n$ (*).

En voyant que S(3304 x 1111) = 31, on a alors $S(3304R_{19}) = S(3304R_4) + 19 - 4 = 31 + 15 = 46$.

Donc $S(3304R_{19}) = S_p(3304\ R_{19})$ : $3304R_{19}$ est bien un nombre de Smith.

b) Supposons alors que $3304R_n$ est un nombre de Smith (ce qui est le cas pour n = 19).
On a alors: $S_p(3304R_m) = m + 27 = m - n + n + 27 = m - n + Sp(3304R_n)$
$= m - n + S(3304R_n)$ (puisque $3304R_n$ est un nombre de Smith).
$= S(3304R_m)$ (d'après la relation (*) trouvée précédemment).
$R_m$ est donc bien un nombre de Smith.

On montre alors bien qu'en passant d'un $R_n$ premier à un autre $R_m$ premier, et en ayant supposé que $3304R_n$ est un nombre de Smith, on a un autre nombre de Smith avec $3304R_m$. En ayant montré initialement que $3304R_{19}$ est un nombre de Smith, on déduit que tous les autres $3304R_n$, avec $R_n$ premier, sont aussi des nombres de Smith.

**Exercice académique 3 Les déplacements du robot**

1.a. Avec$(1,3)$ , $S=4$ et les cases atteignables sont 1, $2=3-1$, 3, $4=1+3$ donc (1,3) est efficace.
Avec$(1,3,5)$ , $S=9$ et les cases atteignables sont $1,2=3-1,3,4=1+3,5,6=1+5$ ,$7=3+5-1$, $8=3+5,9=1+3+5$ donc $(1,3,5)$ est efficace.
Avec $(2,3,4)$, 8 n'est pas atteignable donc $(2,3,4)$ n'est pas efficace.
1.b. $(1,2,4,7)$ est efficace car $S=14$ et les numéros des cases atteignables sont $1,2,3=1+2,4,5=1+4$, $6=2+4,7=1+2+4$ puis $8,9$ , $10$ , $11$ , $12$ , $13,14$ en ajoutant 7 aux précédents.
2.a Avec $(1,2,a)$, les numéros des cases atteignables sont $1,2,3,a-3,a-2,a-1,a,a+1$, $a+2$, $a+3$.
2.b. Comme $S=a+3$, le plus grand entier $a$ qui convient est tel que $a-3=4$ soit $a=7$.
2.c. Avec $(1,2,7,b)$ on a $S=b+10$.
$(1,2,7)$ ne permet d'atteindre que les numéros 1 à 10 et avec $b\geq 11$, les cases atteignables sont $b-10$, $b-9,\dots,b+10$. Le plus grand $b$ qui convient est tel que $b-10=11$ soit $b=21$.
3.a. Oui, $(1,2,4,8,16)$ est efficace : on peut atteindre tous les numéros de 1 à 31.
3.b. $(1,2,4,8,16,32,64)$ est efficace. En ajoutant 32, on atteint tous les numéros de 32 à 63 puis en ajoutant 64 , on atteint les numéros de 64 à $127=S$.
3.c. $(1,2,4,8,16,\dots,2^{k-1})$ est une liste efficace de $k$ nombres entiers.
4.a. $L$ permet au robot d'atteindre toutes les cases dont le numéro $n$ est compris, au sens large, entre 1 et $S$.
En se déplaçant ensuite de $2S+1$, il peut donc atteindre la case $n+2S+1$ . Toutes les cases numérotées de $2S+1$ à $3S+1$ (somme des termes de $L'$) sont donc atteignables.
En se déplaçant d'abord à la case 2S+1 puis en effectuant dans le sens contraire tous les déplacements effectués pour atteindre la case $n$, le robot atteint la case $2S+1-n$. Les numéros de toutes les cases de $S+1$ à $2S$ peuvent s'écrire sous la forme $2S+1-n$ avec $1\leq n\leq S$ donc ces cases sont atteignables.
Finalement $L'$ est une liste efficace.
4.b. En commençant par la liste (1) qui est efficace et en appliquant 4.a. , on obtient successivement les listes $(1,3)$, $(1,3,9)$, $(1,3,9,27)$, $(1,3,9,27,81)$, $(1,3,9,27,81,243)$, $(1,3,9,27,81,243,729)$, $(1,3,9,27,81,243{,}729,2187)$ qui sont toutes efficaces.
La dernière comporte huit entiers et permet au robot d'atteindre toutes les cases numérotées de 1 à 2023.
5.a. Tout entier $N$ compris 1 et $S$ est atteignable.
Pour chaque $i$ compris entre 1 et $k$, si on a effectué un déplacement de $a_i$ cases vers la droite, on pose $\alpha_i=+1$, si on a effectué ce déplacement vers la gauche, on pose $\alpha_i=-1$ et si on n'a pas utilisé le déplacement de $a_i$ cases, on pose $\alpha_i=0$.
On a alors : $N=\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\cdots+\alpha_ka_k$.
5.b. On a $3^k$ choix possibles de $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k)$.
Si les $\alpha_i$ sont tous nuls, $\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\cdots+\alpha_ka_k=0$ qui n'est pas le numéro d'une ace atteignable.
Si l'un au moins des $\alpha_i$ n'est pas nul, les deux nombres $\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\cdots+\alpha_ka_k$ et $(-\alpha_{1)}a_1+(-\alpha_2)a_2+\cdots+(-\alpha_k)a_k$ sont opposés et un seul d'entre eux correspond à une case atteignable.
Le nombre de cases atteignables est donc inférieur ou égal à $\frac{3^k-1}{2}$.
6. Si toutes les cases de 1 à 2023 sont atteignables, $2023\leq S$ donc $2023\leq\frac{3^k-1}{2}$ d'où $3^k\geq 4047$. On en déduit que $k\geq 8$. D'après 4.b., on peut conclure que le plus petit entier $k$ qui convient est 8.