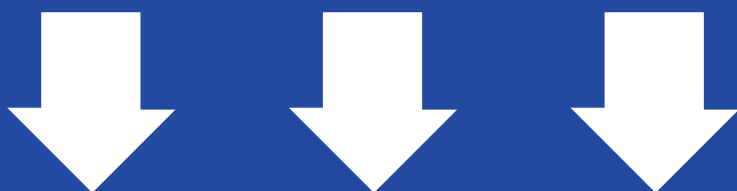


www.freemaths.fr

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE BORDEAUX
2021



CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE



21^e ● LYMPIADES DE MATHÉMATI●QUES

Éléments de solution

Exercices académiques

Exercice 1

Un sur deux

1. Les listes restantes sont successivement : 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 2; 5, 6, 7, 8, 9, 10, 2, 4 ; 7, 8, 9, 10, 2, 4, 6 ; 9, 10, 2, 4, 6, 8 ; 2, 4, 6, 8, 10 ; 6, 8, 10, 4 ; 10, 4, 8 ; 8, 4 ; 4

Donc $f(10) = 4$.

2. $f(2) = 2$ $f(3) = 2$ $f(4) = 4$ $f(5) = 2$
 $f(6) = 4$ $f(7) = 6$ $f(8) = 8$ $f(9) = 2$

3. Ce programme donne la liste des nombres restants en commençant par le premier nombre à effacer.

```
def Unsurdeux(n):  
    L=[]  
    for i in range(1,n+1):  
        L.append(i)  
    while len(L)>1:  
        ListeSuiivante(L)  
    print(L[0])
```

4. Les impairs sont effacés dès le premier tour du cercle. $f(n)$ ne peut donc pas être impair.
5. Conjecture : si n est une puissance de 2 alors $f(n) = n$. On vérifie que $f(16) = 16$.
6. a) Le numéro rencontré est 6
b) Après avoir effacé trois numéros, il en reste 16. Comme $f(16) = 16$, le nombre restant est celui qui précède le premier que l'on va effacer soit 6. Ainsi $f(19) = 6$.
7. a) Le numéro suivant qui sera effacé est 2.
b) Il reste p nombres qui sont dans l'ordre 2, 4, ..., $2p$ qui sont les doubles de 1, 2, ..., p .
Avec 1, 2, ..., p il reste $f(p)$ donc avec 2, 4, ..., $2p$ il reste $2f(p)$. Ainsi $f(n) = 2f(p)$.
8. a) Pour tout entier naturel k , $u_{k+1} = f(2^{k+1}) = f(2 \times 2^k) = 2f(2^k) = 2u_k$.
La suite (u_k) est une suite géométrique de raison 2.
b) $u_k = 2^{k-1}u_1 = 2^{k-1} \times 2 = 2^k$
9. On a $2^{k_n-1} < n \leq 2^{k_n}$ donc $n = 2^{k_n-1} + m$ où $0 < m \leq 2^{k_n-1}$.
 $2m \leq 2n - 2^{k_n} \leq n$ donc les m premiers nombres effacés sont impairs.
Après avoir effacé m nombres, il reste une liste de 2^{k_n-1} nombres dont le premier à effacer est $2m + 1$ et le dernier $2m$. Comme $f(2^{k_n-1}) = 2^{k_n-1}$, on a $f(n) = 2m$.
Ainsi $f(n) = 2(n - 2^{k_n-1}) = 2n - 2^{k_n}$.
10. $2^{10} < 2021 < 2^{11}$ donc $k_{2021} = 11$ d'où $f(2021) = 2 \times 2021 - 2^{11} = 1994$.
11. Si $f(n) \geq 2021$, comme $f(n)$ est pair on a $f(n) \geq 2022$.
Or $f(n) = 2n - 2^{k_n} \leq 2 \times 2^{k_n} - 2^{k_n} \leq 2^{k_n}$ donc $2^{k_n} \geq 2021$ donc $k_n \geq 11$.
Pour $k_n = 11$, $f(n) \geq 2021$ équivaut à $2n - 2^{11} \geq 2022$ soit $n \geq 2035$.

Pour $k_n > 11$, on a $n > 2^{11}$ donc $n > 2035$.

Le plus petit entier n tel que $f(n) \geq 2021$ est donc 2035.

Exercice 2

Nuage bleu !

1. Pour $n = 2$, $f(\mathcal{E}) = 1$. (figure : un segment et son milieu)
Pour $n = 3$, $f(\mathcal{E}) = 3$. (figure : un triangle et les milieux des côtés)
Pour $n = 4$, $f(\mathcal{E}) = 6$ ou $f(\mathcal{E}) = 5$. (figure - un quadrilatère (parallélogramme ou non parallélogramme) et les milieux des côtés et des diagonales)
2. a) $f(\mathcal{E})$ est inférieur ou égal au nombre de segments joignant deux points distincts de \mathcal{E} .
b) $f(\mathcal{E}) < \frac{1}{2}n(n-1)$ si et seulement si il existe un parallélogramme dont les sommets appartiennent à \mathcal{E} .
3. a) Le milieu de $[K_a K_b]$ a pour abscisse $(2^a + 2^b)/2$ et celui de $[K_c K_d]$ a pour abscisse $(2^c + 2^d)/2$ d'où $2^a + 2^b = 2^c + 2^d$.
b) On en déduit $1 + 2^{b-a} = 2^{c-a}(1 + 2^{d-c})$.
Comme $a < b$, le premier membre est impair donc $c - a = 0$ soit $c = a$. Ce qui donne $2^{b-a} = 2^{d-c}$ donc $b - a = d - c = d - a$ soit $b = d$.
C'est impossible car les segments $[K_a K_b]$ et $[K_c K_d]$ sont supposés distincts.
c) $f(\mathcal{E}_1) = \frac{1}{2}n(n-1)$
d) Valeur maximale : $\frac{1}{2}n(n-1)$.
4. a) $AC + BD = 2AI + 2IB = 2(AI + IB) \geq 2AB$.
b) Comme AB est de longueur maximale, $AC \leq AB$ et $BD \leq AB$ et aucune de ces inégalités ne peut être stricte sinon on aurait $AC + BD < 2AB$ en contradiction avec a.
On a donc $AC = AB = BD$ d'où $AI = BI$ et $AI + IB = AB$. On en déduit que I est le milieu de $[AB]$. Comme I est aussi le milieu de $[BD]$, $D = A$. Ce qui est exclu car $[BD]$ appartient à Y .
5. $\text{card}(X) = n - 1$ et $\text{card}(Y) = n - 2$.
D'après 4. les milieux des segments appartenant à X sont distincts des milieux des segments appartenant à Y donc les milieux des segments appartenant à $X \cup Y$ sont au nombre de $\text{card}(X) + \text{card}(Y) = n - 1 + n - 2 = 2n - 3$. Ainsi $f(\mathcal{E}) \geq 2n - 3$.
6. a) Soit I est le milieu d'un segment $[L_a L_b]$ où $1 \leq a < b \leq n$. Son abscisse est $x = a + b$.
On a $3 \leq x \leq 2n - 1$.

Réciproquement

- si $3 \leq y \leq n + 1$ alors le point d'abscisse y est le milieu de $[L_1 L_{y-1}]$.

- si $n + 2 \leq y \leq 2n - 1$ alors le point d'abscisse y est le milieu de $[L_{y-n} L_n]$.

Ainsi $f(\mathcal{E})$ est le nombre d'entiers x tels que $3 \leq x \leq 2n - 1$ donc

$$f(\mathcal{E}) = (2n - 1) - 3 + 1 = 2n - 3.$$

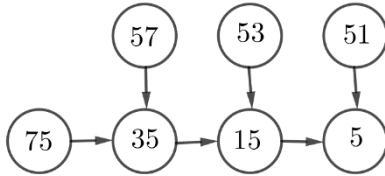
b) Compte tenu de 5 et 6, la valeur minimale de $f(\mathcal{E})$ est $2n - 3$.

Exercice 3

Produits des chiffres

1. $2677889 \rightarrow 338688 \rightarrow 27648 \rightarrow 2688 \rightarrow 768 \rightarrow 336 \rightarrow 54 \rightarrow 20 \rightarrow 0$

2. a.



b. $105 = 3 \times 5 \times 7$, donc 357, 375, 537, 573, 735 et 753 en sont des géniteurs.

c. $357 = 3 \times 7 \times 17$, $375 = 3 \times 5 \times 5 \times 5$, $537 = 3 \times 179$, $573 = 573 = 3 \times 191$, $735 = 3 \times 5 \times 7 \times 7$,

$753 = 3 \times 251$. Donc seuls 375 et 735 ont des géniteurs, 3555 par exemple pour 375 et 3577 pour 735.

d. Un nombre contenant un 3, un 5, un 7 et deux mille dix huit chiffres 1 est un géniteur de 105 à 2021 chiffres.

3. a. $f(N) = x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n < x_1 \times 10 \times \dots \times 10$ donc $f(N) < x_1 \times 10^{n-1}$. D'autre part $N = x_1 \times 10^{n-1} + x_2 \times 10^{n-2} + \dots + x_n \geq x_1 \times 10^{n-1}$. Donc $f(N) < N$.

b. La suite (u) est donc strictement décroissante et par conséquent doit s'arrêter obligatoirement sur un nombre à un chiffre.

4. a. Si le nombre N comporte un chiffre pair alors le produit de ses chiffres est pair et se termine par un chiffre pair. Son fils sera donc lui aussi pair et ainsi de suite jusqu'au numéro de la boîte qui est donc pair. Par conséquent pour atterrir dans une boîte de numéro impair il est nécessaire que chacun des chiffres de N soit impair.

b. 3, 5 et 7 sont les seuls nombres impairs inférieurs à 10.

5. a. 11, 111 et 1111 tombent directement dans la boîte $n^{\circ}1$.

b. Or ces nombres ne figurant pas dans la liste précédente n'ont pas de géniteur qui atterrirait eux aussi dans la boîte $n^{\circ}1$. Donc les nombres trouvés au a. sont les seuls qui atterrissent dans la boîte $n^{\circ}1$.

c. Boîte $n^{\circ}3$: Pour les nombres à n chiffres il y a n possibilités, les anagrammes de 11...13. Or ces nombres n'ont pas eux non plus de géniteurs atterrissant dans la même boîte. Dans E il y a donc $2+3+4 = 9$ entiers atterrissant dans boîte $n^{\circ}3$.

Boîte $n^{\circ}7$: idem que pour 3

Boîte $n^{\circ}9$: deux sortes de nombres : ceux qui contiennent un 9 et des 1, ceux qui contiennent deux 3 et des 1. Ceux sont les seuls car la liste L ne contient pas ces nombres. Il y en a n pour les premiers et

$\frac{n(n-1)}{2}$ pour les seconds, soit $\frac{n(n+1)}{2}$. En tout $3+6+10=19$ entiers de E atterrissent dans la boîte $n^{\circ}9$.

d. Si N contient un 5 dans son écriture $f(N)$ est un multiple de 5, donc se termine par un 0 ou un 5. S'il se termine par un 0, le suivant atterrit dans la boîte n^0 . S'il se termine par un 5, on est ramené au cas précédent. Donc un nombre qui contient un 5 dans son écriture atterrit dans la boîte n^0 ou dans la boîte n^5 .

e. 15, 35, 75, 135, 175, 315, 1575, 1715, 3375, atterrissent dans la boîte n^5 .

Il y a 6 nombres à 2 chiffres qui atterrissent dans la boîte n^5 : 15, 51, 35, 53, 57 et 75.

Pour les nombres à 3 chiffres, il y a les nombres obtenus en rajoutant un 1 et leurs anagrammes, ainsi que les géniteurs de ces nombres à 3 chiffres et leurs anagrammes.

A partir de 15 : 115, 151, 511

A partir de 35 : 135, 153, 315, 351, 513, 531

A partir de 75 : 175 et ses 5 anagrammes, plus ses géniteurs à 3 chiffres 355, 535, 553

A partir de 135 : 359 et ses 5 anagrammes

A partir de 175 : 755 et ses 2 anagrammes

A partir de 315 : 579 et ses 5 anagrammes. En tout 33 entiers à 3 chiffres atterrissent dans la boîte n^5 .

Pour les nombres à 4 chiffres :

A partir de 15 : 4 comme 1115

A partir de 35 : 12 comme 1135

A partir de 75 : 12 comme 1175 et 12 comme 1355

A partir de 135 : 24 comme 1359 et 4 comme 3533

A partir de 175 : 12 comme 1755

A partir de 315 : 24 comme 1579 et 12 comme 3357

A partir 1575 : 12 comme 5579

A partir de 1715 : 4 comme 5777. En tout 132 entiers à 4 chiffres atterrissent dans la boîte n^5 .

Donc en tout 171.