OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

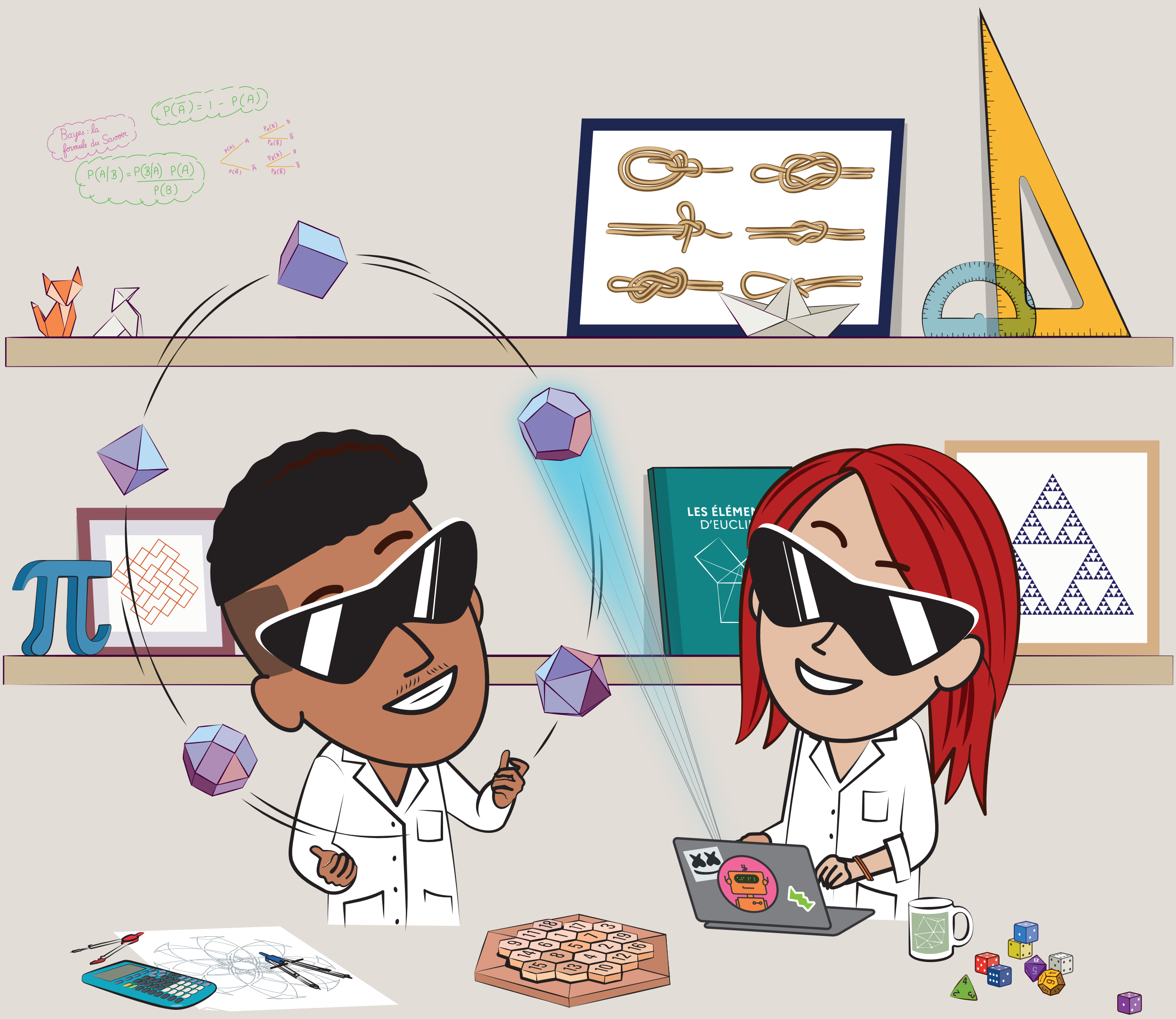
ACADÉMIE DE BESANÇON 2023

SUJET DE L'ÉPREUVE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE

Liberté
Égalité
Fraternité

OLYMPIADES NATIONALES 2023
DE MATHÉMATIQUES



Épreuve le mercredi 15 mars 2023 (le 14 en Polynésie française). 4 exercices en 4 heures.
Palmarès national et académiques, en individuel et par équipes mixtes (de 2, 3 ou 4), selon cursus (technologique, général, général spécialité mathématiques).
Inscriptions auprès de vos professeurs de mathématiques jusqu'au 17 février 2023.

Olympiades académiques de Mathématiques

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
Liberté Égalité Fraternité

ACADÉMIE DE BESANÇON
Liberté Égalité Fraternité

Mercredi 15 mars 2023

Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité

Exercices proposés par l'académie de Besançon

Les calculatrices sont autorisées, à l'exclusion de tout autre appareil électronique. Cependant, le mode examen devra être activé devant les surveillants.

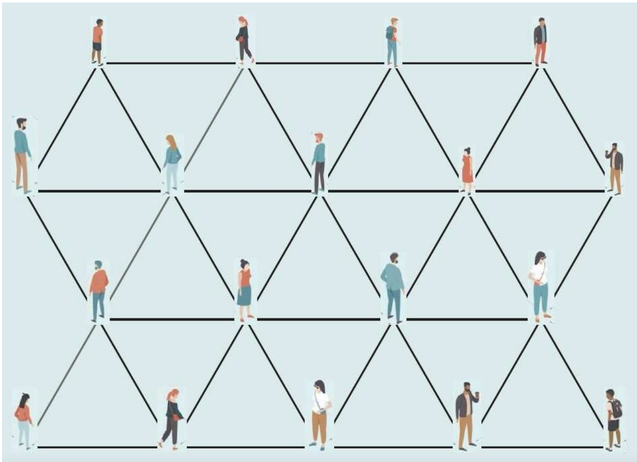
Tous les candidats traiteront les deux exercices que contient ce sujet :

Les candidats indiqueront dans l'en-tête de leurs copies les noms et prénoms de tous les membres du groupe ainsi que l'établissement dans lequel ils sont inscrits.

Sauf cas de force majeure, aucun élève n'est autorisé à quitter définitivement la salle moins d'une heure après le début de l'épreuve.

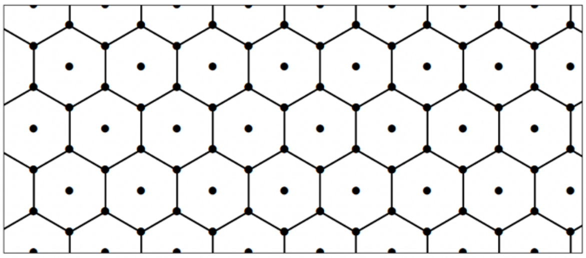
Il est conseillé aux candidats de bien argumenter leurs affirmations. Dans le cas où ils ne pourraient rendre une réponse complète, il est important d'exposer les recherches effectuées.
Le sujet comprend cinq pages.

Exercice 1 : Distanciation physique



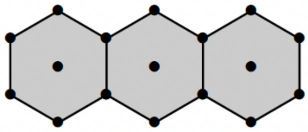
Si une manifestation publique doit respecter les règles de distanciation physique, les organisateurs doivent s'assurer que deux personnes quelconques de l'assemblée doivent être séparées d'au moins 1 mètre.
Il existe plusieurs organisations possibles pour placer les gens ; celle qui permet d'accueillir le plus grand nombre de personnes est celle qui utilisera le moins de surface possible.
On démontre que l'organisation qui utilise le moins de surface est un pavage hexagonal : on place les différentes personnes sur les sommets et les centres d'hexagones de côté 1 m tracés au sol.

Dans cet exercice on se propose d'étudier le nombre maximal de personnes que l'on pourra placer selon la taille du marquage hexagonal au sol.
On s'intéresse donc à un pavage comme celui ci-dessous, où **chaque hexagone a pour côté 1 m** :



Partie 1. Cas d'une ligne d'hexagones

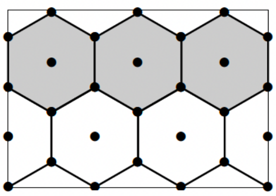
On assemble des hexagones par ligne comme dans le schéma ci-dessous, en marquant chaque sommet et chaque centre :



1. Donner le nombre maximal de personnes que l'on pourra placer sur une ligne contenant trois hexagones.
2. Calculer le nombre maximal de personnes que l'on pourra placer sur une ligne contenant dix hexagones.
3. Soit n un entier naturel quelconque. Quel est le nombre maximal de personnes que l'on pourra placer surune ligne contenant n hexagones ?

Partie 2. Cas d'un marquage à deux lignes d'hexagones

On assemble maintenant deux lignes d'hexagones, de même longueur, comme dans le schéma ci-dessous :



On peut remarquer que cette deuxième ligne contient deux demi-hexagones.
Pour distinguer les lignes, on notera désormais L_1 la première ligne grisée, et L_2la seconde ligne.
On conservera cette notation pour le reste de l'exercice.

1. Si L_1 contient trois hexagones, combien de personnes supplémentaires peut-on placer sur L_2 ?
2. Soit n un entier naturel quelconque. Si L_1 contient n hexagones, combien de personnes supplémentaires peut-on placer sur L_2 ?

Partie 3. Cas d'un marquage à trois lignes d'hexagones

On ajoute une troisième ligne d'hexagones.
1. Si L_1 contient trois hexagones, combien de personnes supplémentaires peut-on placer grâce à L_3 ?
2. Soit n un entier naturel quelconque. Si L_1 contient n hexagones, combien de personnes supplémentaires peut-on placer grâce à L_3 ?
3. Donner le nombre maximal de personnes que l'on peut placer sur un marquage constitué de trois lignes de n hexagones.

Partie 4. Cas de marquages plus vastes

Soit n un entier naturel quelconque.
1. Donner le nombre maximal de personnes que l'on peut placer sur un marquage constitué de sept lignes de n hexagones.
2. Donner le nombre maximal de personnes que l'on peut placer sur un marquage constitué de dix lignes de n hexagones.

Partie 5. Surface à recouvrir

Soit n un entier naturel quelconque. Les lignes considérées dans cette question contiennent n hexagones.
1. Calculer la surface recouverte par la ligne L_1.
2. Soit k un entier naturel quelconque, calculer la surface recouverte par k lignes L_1... L_k agencées comme précédemment.
3. Une salle de spectacle a une forme rectangulaire de largeur 18 m et longueur 25 m.
- **a.** Déterminer k, le nombre maximal de lignes que l'on puisse tracer.
- **b.** Déterminer également n, le nombre maximal d'hexagones que l'on puisse tracer sur chaque ligne.
- **c.** En déduire le nombre maximal de personnes que cette salle peut accueillir en respectant les règles de distanciation sociale.

Exercice 2 : Quatre points dans le plan

Dans cet exercice, une unité étant donnée, on cherche à étudier les distances relatives entre quatre points distincts du plan vérifiant la condition suivante :

« Pour chaque couple de points, la distance entre ces deux points doit être supérieure ou égale à 1 ».

Partie 1. Étude de quelques exemples

1. Justifier que ces quatre points donnent lieu à six longueurs.
2. On suppose que les quatre points A, B, C et D sont alignés dans cet ordre et sont tels que $AB = BC = CD = 1$.
Ces points vérifient-ils la condition ?
3. On suppose que les quatre points A, B, C et D forment un carré de côté 1.
Quelle sera alors la plus grande distance possible entre deux des quatre points ?
4. On suppose que les quatre points A, B, C et D forment un losange de côté 1 et une diagonale de longueur 1.
Justifier que $\sqrt{3}$ est la plus grande distance possible entre deux des quatre points.
5. Proposer une figure où les distances entre les points sont $1, 1, 1, \sqrt{2}, 2$ et $\sqrt{5}$. On justifiera la réponse en codant la figure et en mettant les longueurs.

Partie 2. Un théorème

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Théorème :

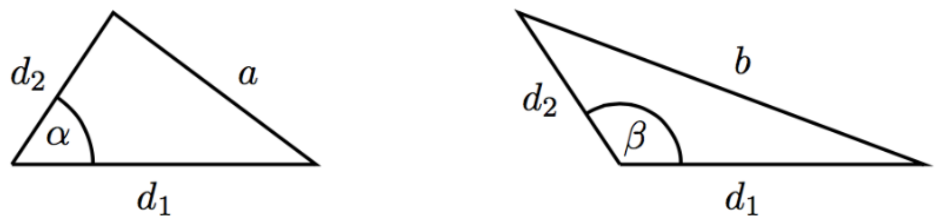
Si quatre points du plan sont séparés d'une distance supérieure ou égale à 1 les uns des autres, alors il y a nécessairement deux points à une distance supérieure ou égale à $\sqrt{2}$.

Dans ce qui suit, on pourra utiliser les propriétés suivantes :

Propriété 1 : La somme des mesures des quatre angles des sommets d'un quadrilatère est égale à 360°.

Propriété 2 : Dans un triangle, on fixe les longueurs des deux côtés adjacents à un angle. Si la mesure de l'angle augmente alors la longueur du côté opposé à l'angle augmente.

Autrement dit :

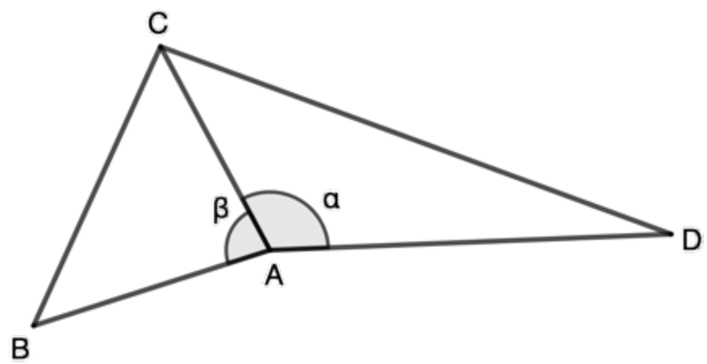


$$\text{Si } \ 0 < \alpha < \beta < 180 \ \text{ alors } \ a < b$$

1. Montrer que le théorème est vérifié si trois des points sont alignés.

On suppose à présent que trois des quatre points ne sont pas alignés. Ils forment alors un quadrilatère ABCD.

2. On suppose que le quadrilatère ABCD possède un angle dont la mesure est strictement supérieure à 180°. Ce qui peut se ramener à étudier la situation ci-dessous où l'angle considéré est $\widehat{DAB}$ et où les longueurs AB, AC et AD sont supérieures à 1.



- **a.** Justifier que l'un, au moins, des deux angles $\widehat{BAC}$ ou $\widehat{CAD}$ est obtus.
- **b.** Montrer alors que l'une, au moins, des deux longueurs BC ou CD est supérieure ou égale à $\sqrt{2}$.

3. On suppose que le quadrilatère ABCD n'a que des angles inférieurs à 180°.

Montrer que si l'un des angles est strictement supérieur à 90° alors on peut se ramener cas précédent (on pourra faire une figure pour illustrer la réponse).

4. Que se passe-t-il si aucun angle n'est strictement supérieur à 90° ?

5. Conclure.

Olympiades académiques de Mathématiques

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

ACADÉMIE DE BESANÇON
Liberté
Égalité
Fraternité

Mercredi 15 mars 2023

Les candidats de la voie générale n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et les candidats de la voie technologique

Exercices proposés par l'académie de Besançon

Les calculatrices sont autorisées, à l'exclusion de tout autre appareil électronique. Cependant, le mode examen devra être activé devant les surveillants.

Tous les candidats traiteront les deux exercices que contient ce sujet :

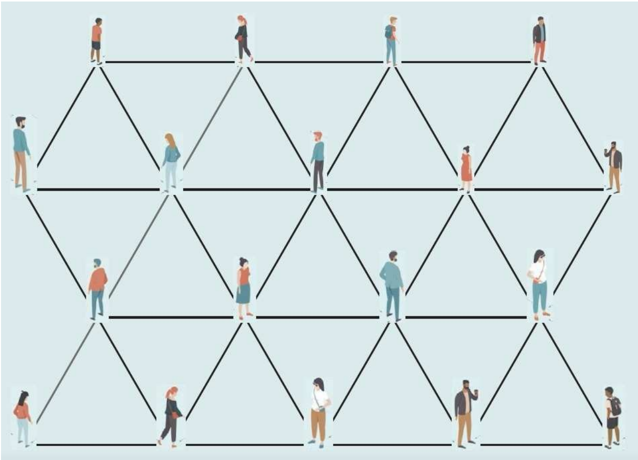
Les candidats indiqueront dans l'en-tête de leurs copies les noms et prénoms de tous les membres du groupe ainsi que l'établissement dans lequel ils sont inscrits.

Sauf cas de force majeure, aucun élève n'est autorisé à quitter définitivement la salle moins d'une heure après le début de l'épreuve.

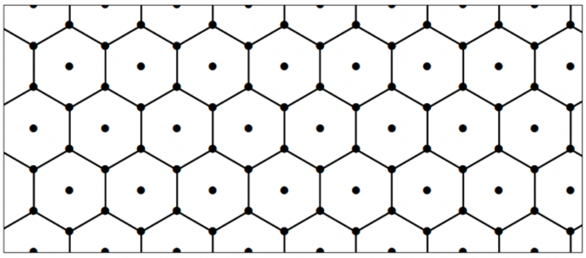
Il est conseillé aux candidats de bien argumenter leurs affirmations. Dans le cas où ils ne pourraient rendre une réponse complète, il est important d'exposer les recherches effectuées.
Le sujet comprend cinq pages.

Exercice 1 : Distanciation physique

Si une manifestation publique doit respecter les règles de distanciation physique, les organisateurs doivent s'assurer que deux personnes quelconques de l'assemblée doivent être séparées d'au moins 1 mètre.
Il existe plusieurs organisations possibles pour placer les gens ; celle qui permet d'accueillir le plus grand nombre de personnes est celle qui utilisera le moins de surface possible.
On démontre que l'organisation qui utilise le moins de surface est un pavage hexagonal : on place les différentes personnes sur les sommets et les centres d'hexagones de côté 1 m tracés au sol.

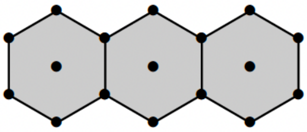


Dans cet exercice on se propose d'étudier le nombre maximal de personnes que l'on pourra placer selon la taille du marquage hexagonal au sol.
On s'intéresse donc à un pavage comme celui ci-dessous, où **chaque hexagone a pour côté 1 m** :



Partie 1. Cas d'une ligne d'hexagones

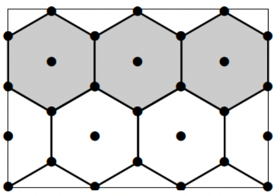
On assemble des hexagones par ligne comme dans le schéma ci-dessous, en marquant chaque sommet et chaque centre :



1. Donner le nombre maximal de personnes que l'on pourra placer sur une ligne contenant trois hexagones.
2. Calculer le nombre maximal de personnes que l'on pourra placer sur une ligne contenant dix hexagones.
3. Soit n un entier naturel quelconque. Quel est le nombre maximal de personnes que l'on pourra placer surune ligne contenant n hexagones ?

Partie 2. Cas d'un marquage à deux lignes d'hexagones

On assemble maintenant deux lignes d'hexagones, de même longueur, comme dans le schéma ci-dessous :



On peut remarquer que cette deuxième ligne contient deux demi-hexagones.
Pour distinguer les lignes, on notera désormais L_1 la première ligne grisée, et L_2la seconde ligne.
On conservera cette notation pour le reste de l'exercice.

1. Si L_1 contient trois hexagones, combien de personnes supplémentaires peut-on placer sur L_2 ?
2. Soit n un entier naturel quelconque. Si L_1 contient n hexagones, combien de personnes supplémentaires peut-on placer sur L_2 ?

Partie 3. Cas d'un marquage à trois lignes d'hexagones

On ajoute une troisième ligne d'hexagones.
1. Si L_1 contient trois hexagones, combien de personnes supplémentaires peut-on placer grâce à L_3 ?
2. Soit n un entier naturel quelconque. Si L_1 contient n hexagones, combien de personnes supplémentaires peut-on placer grâce à L_3 ?
3. Donner le nombre maximal de personnes que l'on peut placer sur un marquage constitué de trois lignes de n hexagones.

Partie 4. Cas de marquages plus vastes

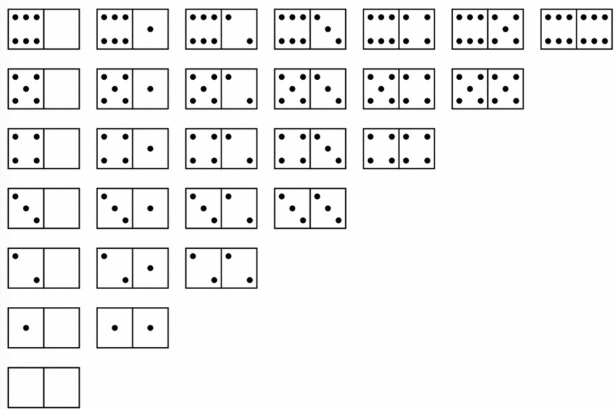
Soit n un entier naturel quelconque.
1. Donner le nombre maximal de personnes que l'on peut placer sur un marquage constitué de sept lignes de n hexagones.
2. Donner le nombre maximal de personnes que l'on peut placer sur un marquage constitué de dix lignes de n hexagones.

Partie 5. Surface à recouvrir

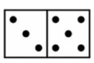
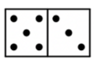
Soit n un entier naturel quelconque. Les lignes considérées dans cette question contiennent n hexagones.
1. Calculer la surface recouverte par la ligne L_1.
2. Soit k un entier naturel quelconque, calculer la surface recouverte par k lignes $L_1 ... L_k$ agencées comme précédemment.
3. Une salle de spectacle a une forme rectangulaire de largeur 18 m et longueur 25 m.
  a. Déterminer k, le nombre maximal de lignes que l'on puisse tracer.
  b. Déterminer également n, le nombre maximal d'hexagones que l'on puisse tracer sur chaque ligne.
  c. En déduire le nombre maximal de personnes que cette salle peut accueillir en respectant les règles de distanciation sociale.

Exercice 2 : Chaînes de dominos

Un domino est une pièce rectangulaire dont la face supérieure est séparée en deux parties représentant chacune un entier compris entre 0 et 6.



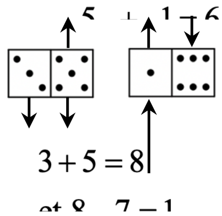
On utilisera les notations suivantes pour décrire la position des dominos que l'on va placer face à nous.

Position du domino		
Notation	$(3; 5)$	$(5; 3)$

Un jeu de dominos est constitué des 28 dominos ci-dessus, chacune des pièces étant unique.

On appelle « chaîne » de dominos l'enchaînement suivant :

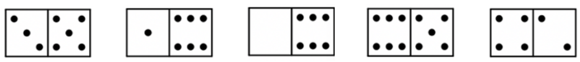
- on pose un premier domino horizontalement face à nous ;
- on place, à la droite de ce premier domino, un deuxième domino tel que chacun des nombres présents sur ce nouveau domino soit égal à :
  - la somme des deux nombres qui le précèdent si cette somme est inférieure à 7,
  - la somme des deux nombres qui le précèdent diminuée de 7 si cette somme est supérieure ou égale à 7 ;



- on poursuit la chaîne de gauche à droite en appliquant la règle précédente ;
- on s'arrête quand le domino qu'il faudrait poser est déjà utilisé.

On appelle « longueur d'une chaîne » le nombre de dominos nécessaires à sa construction.

Voici un exemple de chaîne de longueur 5 et la notation correspondante :

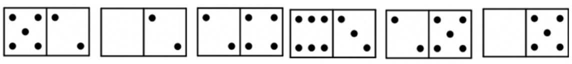


$(3; 5)$ $(1; 6)$ $(0; 6)$ $(6; 5)$ $(4; 2)$

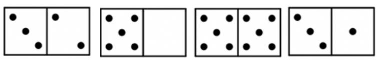
1. Expliquer pourquoi la chaîne donnée en exemple est complète.

2. **a.** Parmi les enchaînements suivants, précisez ceux qui sont des débuts de chaîne corrects.

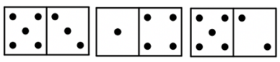
<u>Enchaînement n°1 :</u>



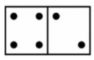
<u>Enchaînement n°2 :</u>



<u>Enchaînement n°3 :</u>



b. Terminer les chaînes de la question **a.** lorsque c'est possible en précisant leurs longueurs.

3. Former la chaîne qui commence par le domino  .

4. Soit a un entier compris entre 0 et 6. Une chaîne débute par le domino noté $(0\,;a)$.
Pour quelle(s) valeur(s) de l'entier a peut-on poursuivre la chaîne ?

5. **a.** Une chaîne contient le domino noté $(1\,;3)$ et ce domino n'est pas le premier. Quel est le domino précédent ?
b. Soit a un entier compris entre 1 et 6. Une chaîne contient le domino noté $(a\,;a)$ et ce domino n'est pas le premier. Quel est le domino précédent ?
c. Une chaîne contient le domino noté $(0\,;a)$ et ce domino n'est pas le premier. Quel est le domino précédent ?

6. Si le premier domino n'est pas un double, est-ce que le retourner modifie la suite de la chaîne ? Est-ce que cela modifie la longueur de la chaîne ?

7. Former trois chaînes de longueur 7 et contenant $(5\,;3)$ ou $(3\,;5)$.

8. Quelle est la longueur maximale d'une chaîne ?