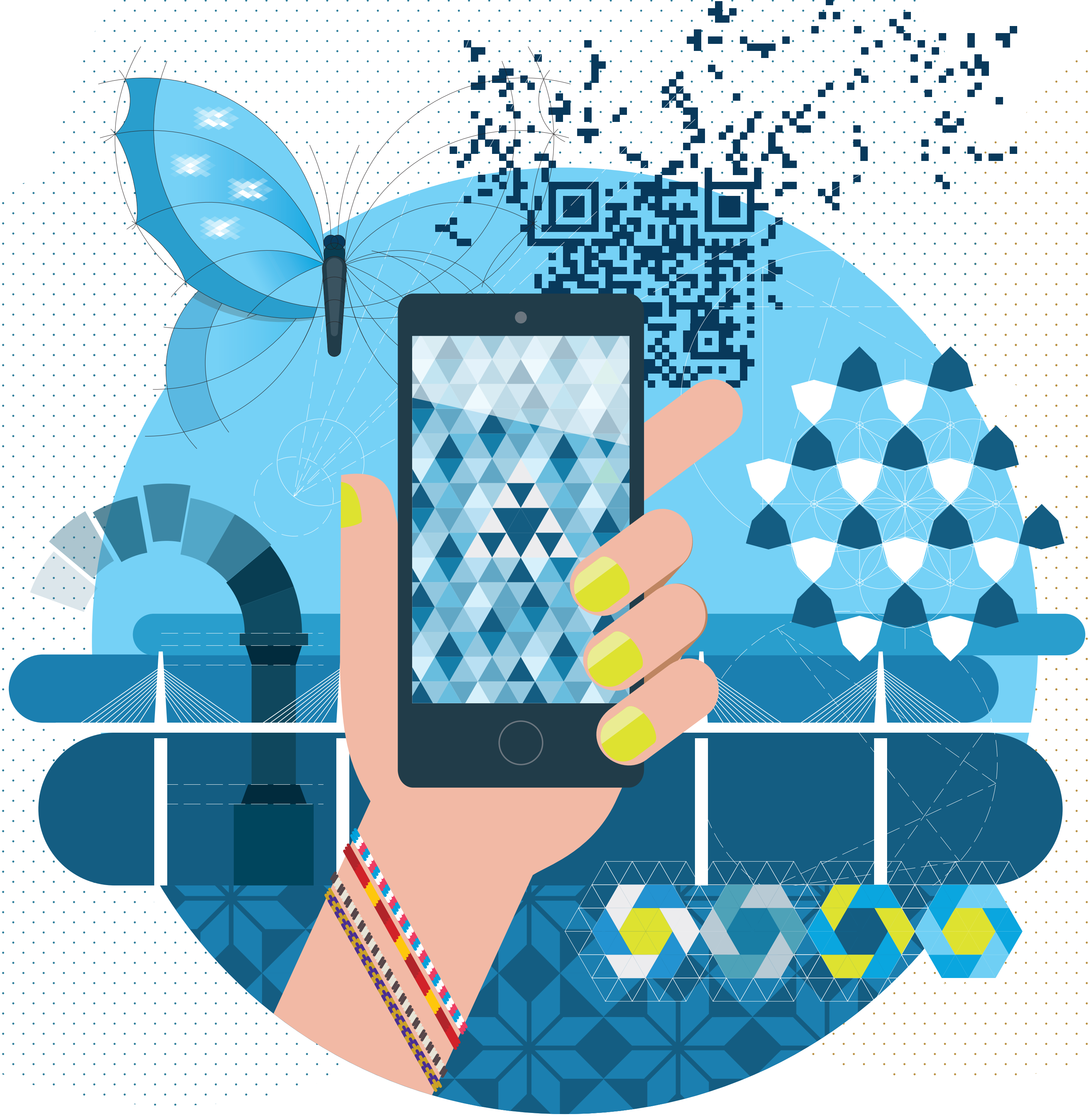
OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE BESANÇON 2022

SUJET DE L'ÉPREUVE



22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

Olympiades académiques de Mathématiques

Mercredi 9 mars 2022

Série générale

Exercices proposés par l'académie de Besançon

Les calculatrices sont autorisées, à l'exclusion de tout autre appareil électronique. Cependant, le mode examen devra être activé devant les surveillants.

Tous les candidats traiteront les deux exercices que contient ce sujet :

Les candidats indiqueront dans l'en-tête de leurs copies les noms et prénoms de tous les membres du groupe ainsi que l'établissement dans lequel ils sont inscrits.

Sauf cas de force majeure, aucun élève n'est autorisé à quitter définitivement la salle moins d'une heure après le début de l'épreuve.

Il est conseillé aux candidats de bien argumenter leurs affirmations. Dans le cas où ils ne pourraient rendre une réponse complète, il est important d'exposer les recherches effectuées.
Le sujet comprend cinq pages.

Exercice 1 : Arithmétique "sans retenues"

Dans tout ce sujet, les nombres sont des éléments de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
Sur $\mathbb{N}$, on définit une addition et une multiplication différentes de celles que nous avons apprises à l'école primaire.
Nous les nommerons et noterons "addition sans retenues" ($\oplus$) et "multiplication sans retenues" ($\otimes$). Le principe est le suivant :

Pour additionner ou multiplier, sans retenues, des nombres à un seul chiffre, on ne garde que le chiffre des unités

Par exemples :

$2 \oplus 3 = 5$	$9 \oplus 4 = 3$	$6 \oplus 5 = 1$	$8 \oplus 8 = 6$
$2 \otimes 3 = 6$	$9 \otimes 4 = 6$	$6 \otimes 5 = 0$	$6 \otimes 4 = 4$

Pour additionner ou multiplier des nombres à plusieurs chiffres, on utilise la procédure habituelle, on pose l'addition ou la multiplication en colonnes et on additionne les chiffres sans tenir compte des retenues :

$$\begin{array}{cccccc}
 & 7 & 3 & 8 & 4 & 5 \\
\oplus & & 9 & 8 & 5 & 6 \\
\hline
 & 7 & 2 & 6 & 9 & 1
\end{array}$$

Ainsi $73\,845 \oplus 9\,856 = 72\,691$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 3 & 8 & 4 & 5 \\
\otimes & & & & 8 & 5 & 6 \\
\hline
 & & & 8 & 8 & 4 & 0 \\
\oplus & & 5 & 0 & 0 & 5 & \cdot \\
\oplus & 4 & 4 & 2 & 0 & \cdot & \cdot \\
\hline
 & 4 & 9 & 0 & 8 & 9 & 0
\end{array}$$

Ainsi $3\,845 \otimes 856 = 490\,890$

I Premiers exemples et premières propriétés

1. Calculer :

$7 \oplus 8$	$7 \otimes 8$	$12 \oplus 19$	$19 \oplus 12$
$23 \otimes 19$	$19 \otimes 23$	$456 \oplus 2\,867$	$2\,867 \oplus 456$
$456 \otimes 2\,867$	$2\,867 \otimes 456$	$(12 \otimes 543) \otimes 7$	$12 \otimes (543 \otimes 7)$

*On admettra que $\oplus$ et $\otimes$ sont des opérations **commutatives** c'est-à-dire que pour tous nombres entiers naturels a et b,*

$$a \oplus b = b \oplus a \qquad \text{et} \qquad a \otimes b = b \otimes a$$

*On admettra également que $\otimes$ est une opération **associative** c'est-à-dire que pour tous nombres entiers naturels a,b et c,*

$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$$

2. Trouver un nombre entier α tel que, pour tout entier n, $\alpha \oplus n = n$.

3. Trouver un nombre entier β tel que, pour tout entier n, $\beta \otimes n = n$.

II Quelques curiosités

1. Opposés

Définition : Dans cette arithmétique, deux nombres entiers a et b sont dits **opposés** si $a \oplus b = 0$.

- **a.** Calculer $52 \oplus 58$, puis $123 \oplus 987$.
- **b.** Trouver un couple de nombres opposés à 4 chiffres.

2. Carrés

- **a.** Calculer $n \otimes n$ pour $n = 4$, puis pour $n = 10$, puis pour $n = 14$.
- **b.** Dresser la liste des carrés de n pour n allant de 0 à 20.

3. Résolution de quelques équations

- **a.** Trouver un nombre entier n tel que $56 \oplus n = 65$.
- **b.** Trouver une solution à l'équation $72 \oplus n = 103$.
- **c.** Trouver quatre solutions à deux chiffres et une solution à trois chiffres de l'équation $n \otimes 6 = 42$.
- **d.** Trouver six solutions, ayant des chiffres des unités distincts, de l'équation $n \otimes 2 = 2$.

III Diviseurs, multiples, nombres premiers

1. Diviseurs de 1

Définition : Soient a et b deux nombres entiers naturels. Dans cette arithmétique, on dit que b est un **diviseur** de a s'il existe un nombre entier naturel q tel que $a = b \otimes q$.

Remarque : comme $\otimes$ est une opération commutative, q est aussi un diviseur de a.

- **a.** Calculer les produits $1 \otimes 1$, $3 \otimes 7$ et $9 \otimes 9$.
- **b.** On a vu que $3\,845 \otimes 856 = 490\,890$.
  Trouver trois autres produits $m \otimes n$ tels que $m \otimes n = 490\,890$ où m et n sont des entiers distincts de 1 et de $490\,890$.

2. Diviseurs non triviaux de 0

Définition : Soit a un entier naturel non nul. Dans cette arithmétique, on dit que a est un diviseur **non trivial de 0** s'il existe un nombre entier naturel non nul b tel que $a \otimes b = 0$.

- **a.** Le nombre 2022 est-il un diviseur non trivial de 0 ?
- **b.** Le nombre 25 peut-il être un diviseur non trivial de 0 ?

3. Multiples de 9

Voici la liste des 21 premiers *multiples* de 9 :

$9 \otimes 0 = 0$	$9 \otimes 3 = 7$	$9 \otimes 6 = 4$	$9 \otimes 9 = 1$	$9 \otimes 12 = 98$	$9 \otimes 15 = 95$	$9 \otimes 18 = 92$
$9 \otimes 1 = 9$	$9 \otimes 4 = 6$	$9 \otimes 7 = 3$	$9 \otimes 10 = 90$	$9 \otimes 13 = 97$	$9 \otimes 16 = 94$	$9 \otimes 19 = 91$
$9 \otimes 2 = 8$	$9 \otimes 5 = 5$	$9 \otimes 8 = 2$	$9 \otimes 11 = 99$	$9 \otimes 14 = 96$	$9 \otimes 17 = 93$	$9 \otimes 20 = 80$

Montrer que tout nombre entier n est *divisible* par 9.

Il en est donc de même pour 3 et trivialement pour 1. On admet que tout nombre entier naturel est également divisible par 7 et que seuls les nombres $1, 3, 7$ et 9 ont cette propriété.
On peut à présent définir ce qu'est un nombre premier dans cette arithmétique.

4. Nombres premiers

Définition : On note $U = \{1, 3, 7, 9\}$ et soit n un nombre entier naturel. On dit que n est un **nombre premier** si ses seules décompositions possibles sont de la forme $n = u \otimes q$ avec q un nombre entier et $u \in U$.

- **a.** Les nombres 2, 17 et 2022 sont-ils premiers ?
- **b.** On admet que 21 est le plus petit nombre premier. Proposer deux factorisations de 21 de la forme $u \otimes q$ avec $u \in U$ différent de 1 et q entier naturel.

Exercice 2 : le jeu des différences

Partie 1 : Le jeu

On rappelle que la distance entre deux nombres entiers a et b est égale à $|a-b|$.
Il s'agit donc de $a-b$ si $a \geq b$ et de $b-a$ si $a \leq b$. Dans la suite, on la notera cette distance $dist(a,b)$

On considère quatre nombres entiers naturels a, b, c et d que l'on dispose dans un certain ordre en ligne.
La ligne suivante se déduit de la précédente en y notant les quatre nombres suivants :
$dist(a,b)$, $dist(b,c)$, $dist(c,d)$, $dist(d,a)$
Ainsi par exemple la ligne :

7	5	3	11

devient :

7	5	3	11
2	2	8	4

On réitère ainsi ce procédé de lignes en lignes. Lorsqu'une ligne constituée de quatre zéros apparaît, on dit que le jeu des différences s'arrête.
On note alors $N(a,b,c,d)$ le nombre d'étapes pour arriver à $(0,0,0,0)$
En particulier, on a $N(0{,}0{,}0{,}0) = 0$

1) Reprendre l'exemple ci-dessus et le poursuivre. On pourra utiliser un tableau de la forme :

7	5	3	11
2	2	8	4
… … …			
…	…	…	…

Sur cet exemple, le jeu des différences s'arrête-t-il ? si oui, déterminer $N(7,5,3,11)$

2) Déterminer, s'il existe, $N(2,0,2,2)$

3) Plus généralement, si a et b sont deux nombres entiers naturels distincts,
Déterminer $N(a,b,a,b)$
Déterminer $N(a,b,b,a)$

4) On note $Max(a,b,c,d)$ le plus grand des quatre nombres a, b, c et d.
Montrer que si la ligne :

a	b	c	d

devient :

a	b	c	d
a'	b'	c'	d'

Alors $Max(a',b',c',d') \leq Max(a,b,c,d)$

Partie 2 : Quelques propriétés

On suppose pour les cas considérés dans cette partie que le jeu s'arrête.

1) On considère une liste de quatre nombres entiers naturels (a,b,c,d). Appliquer une permutation circulaire à cette liste consiste à transformer (a,b,c,d) en (b,c,d,a).

- ***a***. Ecrire toutes les listes obtenues en effectuant des permutations circulaires successives.
- ***b***. Justifier que $N(b,c,d,a) = N(a,b,c,d)$

On dira qu'une (ou plusieurs) permutation(s) circulaire(s) ne change(nt) pas le nombre d'étapes pour terminer le jeu des différences.

2) Soit k un nombre entier naturel non nul.

a. Montrer que :

$$N(a+k,b+k,c+k,d+k)=N(a,b,c,d)$$

b. Montrer que :

$$N(2a,2b,2c,2d)=N(a,b,c,d)$$

Partie 3 : Ce jeu s'arrête-t-il toujours ?

<u>**1**) **Dans cette question seulement**</u>, on s'intéresse au jeu des différences pour un triplet de 3 entiers.

a. Appliquer les règles du jeu des différences au triplet (1,2,3)

b. Que laisse suggérer la question a ?

2) Soient a et b deux nombres entiers naturels. On rappelle que si a et b sont tous les deux pairs, ou tous les deux impairs, alors leur différence est paire.
Démontrer que si l'un est pair et l'autre impair alors leur différence est impaire.

<u>**3**) **Modification du jeu**</u> : reprenons le cas du jeu avec quatre nombres entiers naturels.

Modifions le jeu et remplaçons chacun des quatre nombres de la liste (a,b,c,d) par la lettre p si le nombre pair et par la lettre i si le nombre est impair. Par exemple la ligne :

7	2	5	13	*(jeu original)*

Se transforme en :

i	p	i	i	*(jeu modifié)*

Appliquons maintenant le jeu des différences en ne considérant que la parité, donc en n'utilisant que les lettres i et p. Ainsi la ligne :

i	p	i	i

devient :

i	p	i	i
i	i	p	p

a. Poursuivre le processus en partant de : (i,p,i,i) et montrer que ce jeu modifié aboutit à l'étape (p,p,p,p)

Dans ce jeu modifié, on garde à chaque étape l'information « pair » ou « impair » sur les nombres qui apparaissent à la même étape dans le jeu original. L'avantage est qu'il y a un nombre fini de possibilités au départ : il y en a exactement 16.

b. Lister tous les cas

c. Montrer que tous les cas aboutissent à la même ligne (p,p,p,p) en un maximum de 4 étapes. On pourra s'inspirer de l'exemple précédent et des observations faites dans la partie 2.

4) ***a***. Pour tout entier naturel n¸ démontrer qu'en $4n$ étapes, le jeu classique non simplifié donne un quadruplet de la forme $(2^n a_n,\ 2^n b_n\ ,\ 2^n c_n,\ 2^n d_n)$ où $a_n, b_n,\ c_n\ et\ d_n$ sont quatre entiers naturels.

b. Démontrer qu'il existe un rang n_0 à partir duquel tous les nombres $a_n, b_n,\ c_n\ et\ d_n$ sont nuls.

c. Démontrer qu'alors le jeu s'arrête.