OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE BESANÇON 2021

SUJET DE L'ÉPREUVE

21e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

Olympiades académiques de Mathématiques

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Mardi 23 mars 2021

RÉGION ACADÉMIQUE
BOURGOGNE
FRANCHE-COMTÉ

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE
MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Série générale

Exercices proposés par l'académie de Besançon

Les calculatrices sont autorisées, à l'exclusion de tout autre appareil électronique. Cependant, le mode examen devra être activé devant les surveillants.

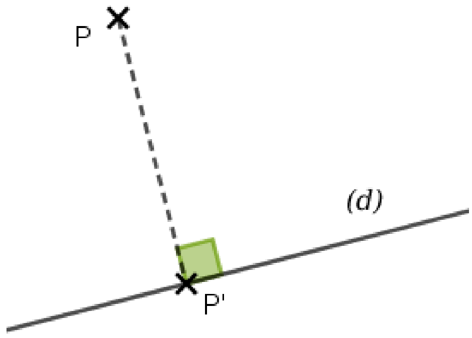
Tous les candidats traiteront les deux exercices que contient ce sujet :

Les candidats indiqueront dans l'en-tête de leurs copies leurs noms, prénoms, filière et établissement dans lequel ils sont inscrits (dans le cas où les élèves composent en groupe, il conviendra de noter tous les noms des élèves du groupe).

Sauf cas de force majeure, aucun élève n'est autorisé à quitter définitivement la salle moins d'une heure après le début de l'épreuve.

Il est conseillé aux candidats de bien argumenter leurs affirmations. Dans le cas où ils ne pourraient rendre une réponse complète, il est important d'exposer les recherches effectuées.
Le sujet comprend six pages.

EXERCICE 1 : MARCHE ENTRE DEUX TOURS



Définitions : Soit (d) une droite du plan et P un point de ce plan.

1) On appelle *projeté orthogonal* de P sur (d), le point P' intersection de (d) avec la droite perpendiculaire à (d) passant par P.

2) On appelle *distance entre le point* P *et la droite* (d) la longueur PP' où P' est le projeté orthogonal de P sur (d).

   C'est la plus petite distance entre le point P et un point de la droite (d), autrement dit, pour tout point M de la droite (d), on a :
$$\mathrm{PP}' \leq \mathrm{PM}$$

Rappel : Dans un repère orthonormé du plan, la distance entre deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ est donnée par
$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})^2}$$

Les réponses aux parties A et B peuvent être accompagnées de figures. L'annexe concerne la partie C et doit être rendue avec la copie.

Partie A :
L'objectif de cette partie est de démontrer que la bissectrice d'un angle est l'ensemble des points équidistants des côtés de cet angle.

On considère trois points O, A et B distincts et non alignés du plan. Ils forment ainsi les deux demi-droites [OA) et [OB).

1- Soit (Δ) la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{AOB}}$ et soit M un point quelconque de (Δ).
   Démontrer que le point M est équidistant de [OA) et de [OB). On pourra appeler M_1 et M_2 les projetés orthogonaux de M respectivement sur [OA) et sur [OB).

2- Réciproquement, démontrer que si le point M est équidistant de [OA) et de [OB), alors il appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{AOB}}$.

Partie B :
L'objectif de cette partie est de déterminer l'ensemble des points équidistants d'une droite et d'un point. On pourra réaliser des figures pour illustrer certaines réponses aux questions.

1- On munit le plan d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \mathrm{I}, \mathrm{J})$ et on considère la droite (d) d'équation $y = -1$ et le point P de coordonnées $(0; 1)$.
   Soit $\mathrm{M}(x_\mathrm{M}; y_\mathrm{M})$ un point quelconque du plan.
   a) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal M' de M sur la droite (d).
   b) Exprimer les distances MP et MM' en fonction de x_M et de y_M.
   c) En déduire l'ensemble des points équidistants de la droite (d) et du point P.

2- Soit (d) une droite quelconque du plan et soit P un point n'appartenant pas à (d).

a) Montrer qu'on peut trouver un repère $(O; I, J)$ dans lequel la droite (d) a pour équation $y = -1$ et le point P pour coordonnées $(0; 1)$.
b) En déduire l'ensemble des points équidistants de la droite (d) et du point P.
Donner la position d'un point remarquable de cet ensemble.

Partie C :
Des assaillants envisagent de piller une ville et doivent passer par un chemin qui est sous la surveillance d'un bastion et d'un donjon. Ces deux ouvrages possèdent des tours et un chemin de ronde qui en fait le tour. Chaque ouvrage a un garde de service. Ils sont représentés en **annexe.**
Lancelot est affecté au Bastion, Perceval au Donjon. Au départ Lancelot est sur la tour Nord (N) ; Perceval sur la tour de Bourgogne.

Des rondes ont été organisées comme suit :
- Perceval reste à son poste sur la tour de Bourgogne et Lancelot se rend sur la tour Est (E) ;
- puis, Lancelot reste à son poste à la tour Est et Perceval se rend à la tour de Franche-Comté (par le rempart qui longe le chemin) ;
- enfin, Perceval reste à son poste à la tour de Franche Comte et Lancelot se rend sur la tour Sud (S).

Ensuite la ronde reprend à l'envers.

La surveillance est toujours active, gardes en marche ou en poste, mais il reste une zone aveugle aux gardes assimilable à l'ensemble des points équidistants des deux gardes à chaque instant.

Question : Si un assaillant passant par le chemin et se dirigeant vers la ville, a-t-il une chance de passer sans se faire repérer par les gardes ?

Un plan de la situation est fourni en pages annexe en deux exemplaires :
- Le premier peut être utilisé comme brouillon pour faire des essais,
- Le deuxième est à rendre avec la copie.

Une partie du tracé pourra être dessiné à main levée mais la construction devra être justifiée.

EXERCICE 2 : NOMBRE DE COLORIAGES

On souhaite colorier un rectangle formé de carrés accolés disposés sur trois lignes et n colonnes (n est un entier naturel non nul). On dispose pour cela de 3 couleurs et dans un souci pratique, on notera A, B et C ces trois couleurs. On impose pour le coloriage du rectangle la contrainte suivante :

deux carrés ayant un côté commun ne peuvent pas être coloriés de la même couleur.

On remarquera que malgré cette contrainte, un drapeau peut être bicolore.

Exemple de coloriage d'un rectangle dans le cas où $n = 12$, c'est-à-dire d'un rectangle de 3 lignes et 12 colonnes :

A	C	B	C	A	C	B	C	B	A	B	C
C	B	C	A	C	A	C	B	A	B	A	B
B	C	A	B	A	C	B	C	B	C	B	A

1- a) Les rectangles ci-dessous respectent-ils la contrainte imposée ? Justifier.

rectangle 1

C
B
C

rectangle 2

A
A
C

rectangle 3

A	B
B	A
A	B

rectangle 4

C	A
B	B
A	C

rectangle 5

B	A
A	C
B	A

b) Lister les différents coloriages pour un rectangle ayant trois lignes et une seule colonne.

2- a) Recopier et proposer un coloriage possible du rectangle ci-contre :

	A	
		B
A		

b) On donne, ci-dessous, deux rectangles qui se distinguent par leur $n^{\text{ième}}$ colonne.
Dans chaque cas, déterminer le nombre de coloriages possibles pour la $n+1^{\text{ième}}$ colonne.

Cas 1

	$n^{ième}$ colonne	
…	A	
…	B	
…	A	

Cas 2

	$n^{ième}$ colonne	
…	A	
…	B	
…	C	

3- On souhaite calculer le nombre, noté c_n, de coloriages différents pour un rectangle ayant trois lignes et n colonnes (n est un entier naturel non nul). A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de c_1 puis justifier que $c_2 = 54$.

4- On note donc b_n le nombre de coloriages de rectangles à n colonnes qui se terminent par une colonne bicolore et t_n le nombre de coloriages de rectangles à n colonnes qui se terminent par une colonne tricolore. On a alors $c_n = b_n + t_n$ pour tout entier naturel n non nul.

a) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\begin{cases} b_{n+1} = 3b_n + 2t_n \\ t_{n+1} = 2b_n + 2t_n \end{cases}$$

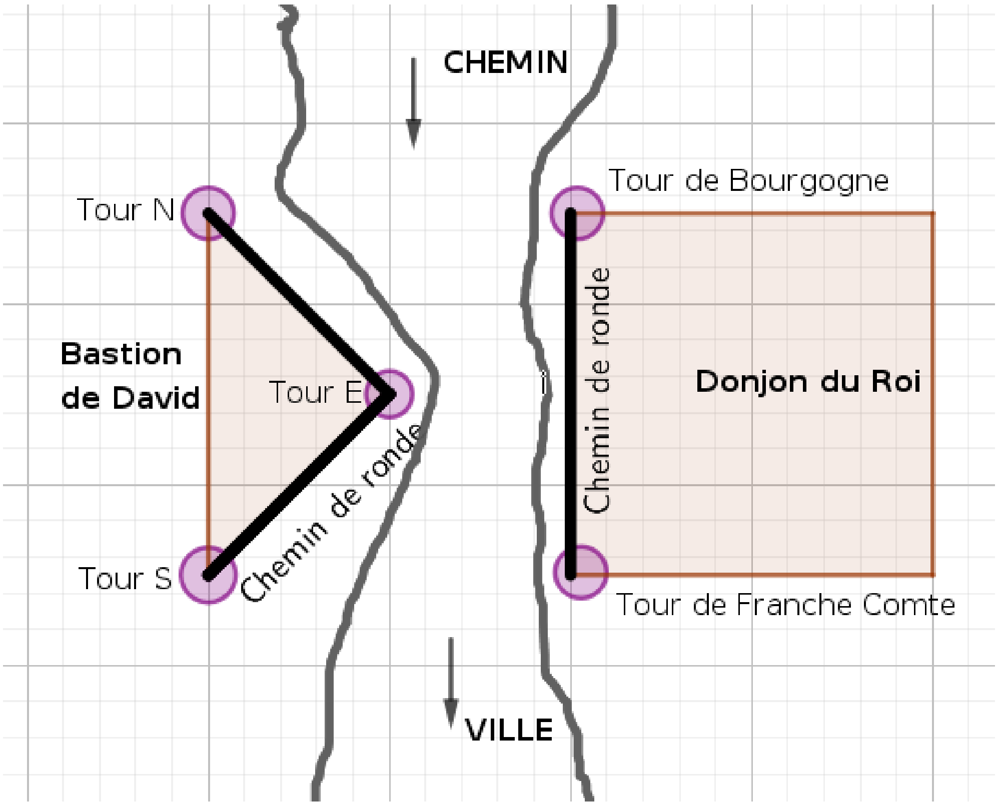
b) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $c_{n+1} = 5c_n - 2c_{n-1}$.

5- Ecrire un programme qui, lorsqu'on rentre la valeur de n, renvoie la valeur de c_n.

6- Combien de colonnes au minimum un rectangle doit-il posséder pour que l'on puisse le colorier d'au moins un milliard de façons différentes ?

Annexe

BROUILLON

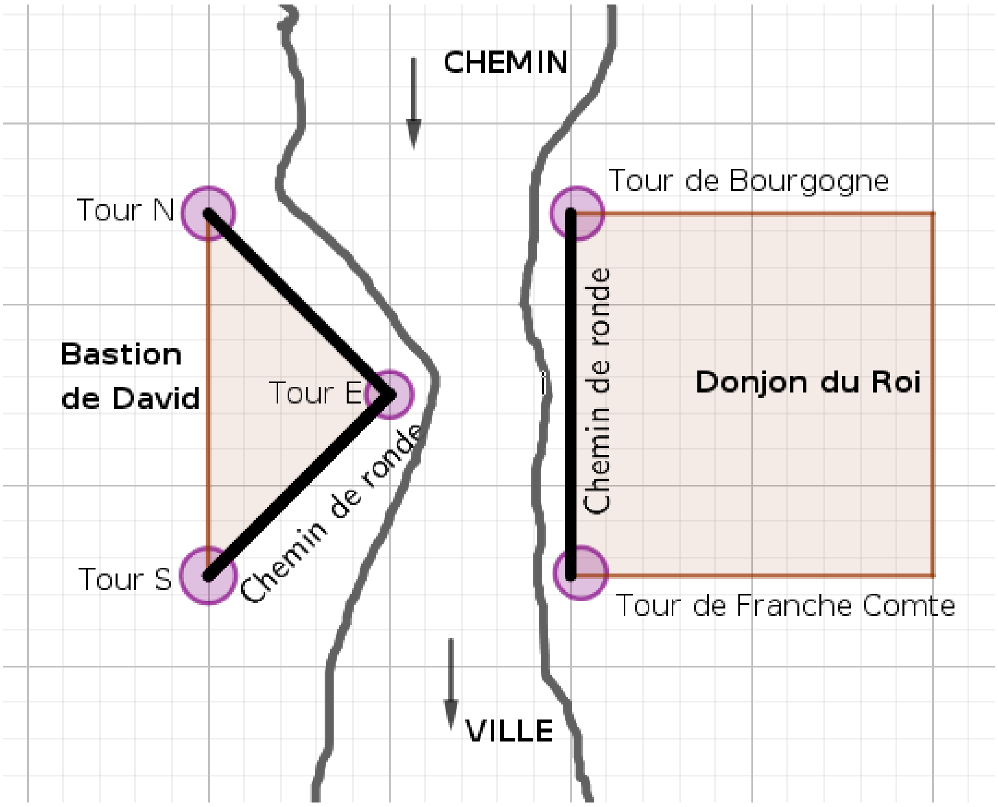


NOMS et Prénoms des élèves du groupe :

Établissement :

Annexe

A RENDRE AVEC LA COPIE



Olympiades académiques de Mathématiques

Mardi 23 mars 2021

Série Technologique

Exercices proposés par l'académie de Besançon

Les calculatrices sont autorisées, à l'exclusion de tout autre appareil électronique. Cependant, le mode examen devra être activé devant les surveillants.

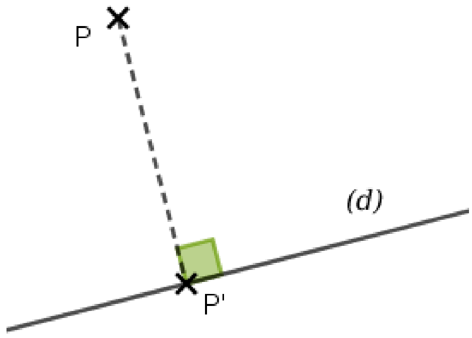
Tous les candidats traiteront les deux exercices que contient ce sujet :

Les candidats indiqueront dans l'en-tête de leurs copies leurs noms, prénoms, filière et établissement dans lequel ils sont inscrits (dans le cas où les élèves composent en groupe, il conviendra de noter tous les noms des élèves du groupe).

Sauf cas de force majeure, aucun élève n'est autorisé à quitter définitivement la salle moins d'une heure après le début de l'épreuve.

Il est conseillé aux candidats de bien argumenter leurs affirmations. Dans le cas où ils ne pourraient rendre une réponse complète, il est important d'exposer les recherches effectuées.
Le sujet comprend six pages.

EXERCICE 1 : MARCHE ENTRE DEUX TOURS



Définitions : Soit (d) une droite du plan et P un point de ce plan.

1) On appelle *projeté orthogonal* de P sur (d), le point P’ intersection de (d) avec la droite perpendiculaire à (d) passant par P.

2) On appelle *distance entre le point* P *et la droite* (d) la longueur PP’ où P’ est le projeté orthogonal de P sur (d).

   C'est la plus petite distance entre le point P et un point de la droite (d), autrement dit, pour tout point M de la droite (d), on a :

$$\mathrm{PP}' \leq \mathrm{PM}$$

Rappel : Dans un repère orthonormé du plan, la distance entre deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ est donnée par

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})^2}$$

Les réponses aux parties A et B peuvent être accompagnées de figures. L'annexe concerne la partie C et doit être rendue avec la copie.

Partie A :

L'objectif de cette partie est de démontrer que la bissectrice d'un angle est l'ensemble des points équidistants des côtés de cet angle.

On considère trois points O, A et B distincts et non alignés du plan. Ils forment ainsi les deux demi-droites [OA) et [OB).

1- Soit (Δ) la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{AOB}}$ et soit M un point quelconque de (Δ).
Démontrer que le point M est équidistant de [OA) et de [OB). On pourra appeler M_1 et M_2 les projetés orthogonaux de M respectivement sur [OA) et sur [OB).

2- Réciproquement, démontrer que si le point M est équidistant de [OA) et de [OB), alors il appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{AOB}}$.

Partie B :

L'objectif de cette partie est de déterminer l'ensemble des points équidistants d'une droite et d'un point.
On pourra réaliser des figures pour illustrer certaines réponses aux questions.

1- On munit le plan d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \mathrm{I}, \mathrm{J})$ et on considère la droite (d) d'équation $y = -1$ et le point P de coordonnées $(0; 1)$.
Soit $\mathrm{M}(x_\mathrm{M}; y_\mathrm{M})$ un point quelconque du plan.
   a) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal M' de M sur la droite (d).
   b) Exprimer les distances MP et MM’ en fonction de x_M et de y_M.
   c) En déduire l'ensemble des points équidistants de la droite (d) et du point P.

2- Soit (d) une droite quelconque du plan et soit P un point n'appartenant pas à (d).

a) Montrer qu'on peut trouver un repère $(0; \mathrm{I}, \mathrm{J})$ dans lequel la droite (d) a pour équation $y = -1$ et le point P pour coordonnées $(0; 1)$.

b) En déduire l'ensemble des points équidistants de la droite (d) et du point P.
Donner la position d'un point remarquable de cet ensemble.

Partie C :

Des assaillants envisagent de piller une ville et doivent passer par un chemin qui est sous la surveillance d'un bastion et d'un donjon. Ces deux ouvrages possèdent des tours et un chemin de ronde qui en fait le tour. Chaque ouvrage a un garde de service. Ils sont représentés en **annexe.**
Lancelot est affecté au Bastion, Perceval au Donjon. Au départ Lancelot est sur la tour Nord (N) ; Perceval sur la tour de Bourgogne.

Des rondes ont été organisées comme suit :

- Perceval reste à son poste sur la tour de Bourgogne et Lancelot se rend sur la tour Est (E) ;
- puis, Lancelot reste à son poste à la tour Est et Perceval se rend à la tour de Franche-Comté (par le rempart qui longe le chemin) ;
- enfin, Perceval reste à son poste à la tour de Franche Comte et Lancelot se rend sur la tour Sud (S).

Ensuite la ronde reprend à l'envers.

La surveillance est toujours active, gardes en marche ou en poste, mais il reste une zone aveugle aux gardes assimilable à l'ensemble des points équidistants des deux gardes à chaque instant.

Question : Si un assaillant passant par le chemin et se dirigeant vers la ville, a-t-il une chance de passer sans se faire repérer par les gardes ?

Un plan de la situation est fourni en pages annexe en deux exemplaires :

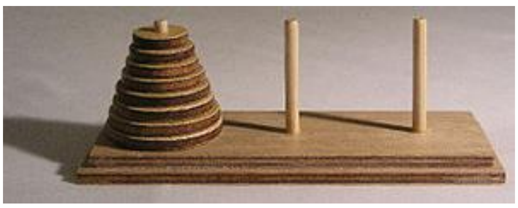
- Le premier peut être utilisé comme brouillon pour faire des essais,
- Le deuxième est à rendre avec la copie.

Une partie du tracé pourra être dessiné à main levée mais la construction devra être justifiée.

EXERCICE 3 : LES TOURS DE HANOÏ *(1ère Technologique)*

On dispose de trois tours. Autour de la première sont disposés des disques de diamètres différents, rangés par ordre décroissant de diamètre, le disque ayant le plus grand diamètre se trouvant à la base de la tour.
Le jeu des tours de Hanoï consiste à déplacer les disques de la première tour vers la troisième, en respectant les règles suivantes :

- on ne peut déplacer qu'un seul disque à la fois ;
- on ne peut déplacer un disque que sur un disque de diamètre plus grand ou sur un emplacement vide.



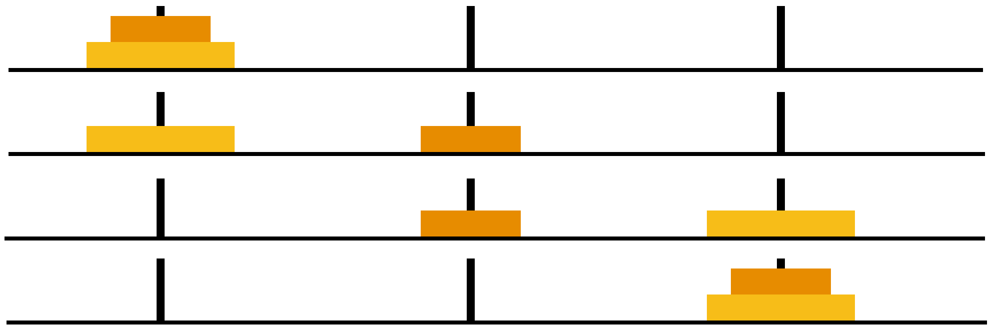
Ainsi, si on dispose de 2 disques, voici les étapes permettant de déplacer ces disques vers la troisième tour :

Etat initial :

Etape 1 :

Etape 2 :

Etape 3 :



Le jeu se termine donc ici en 3 coups (au minimum).

Soit n un entier naturel non nul. On note u_n le nombre minimal d'étapes nécessaires pour déplacer, en respectant les règles du jeu, n disques, initialement placés sur la première tour, jusqu'à la troisième tour.

1- Préciser les valeurs de u_1 et u_2.

2- Déterminer u_3 en vous inspirant des schémas ci-dessus et en faisant apparaître les étapes de déplacements.

3- Donner la valeur de u_4 en détaillant le raisonnement.

4- À l'aide des questions précédentes, conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

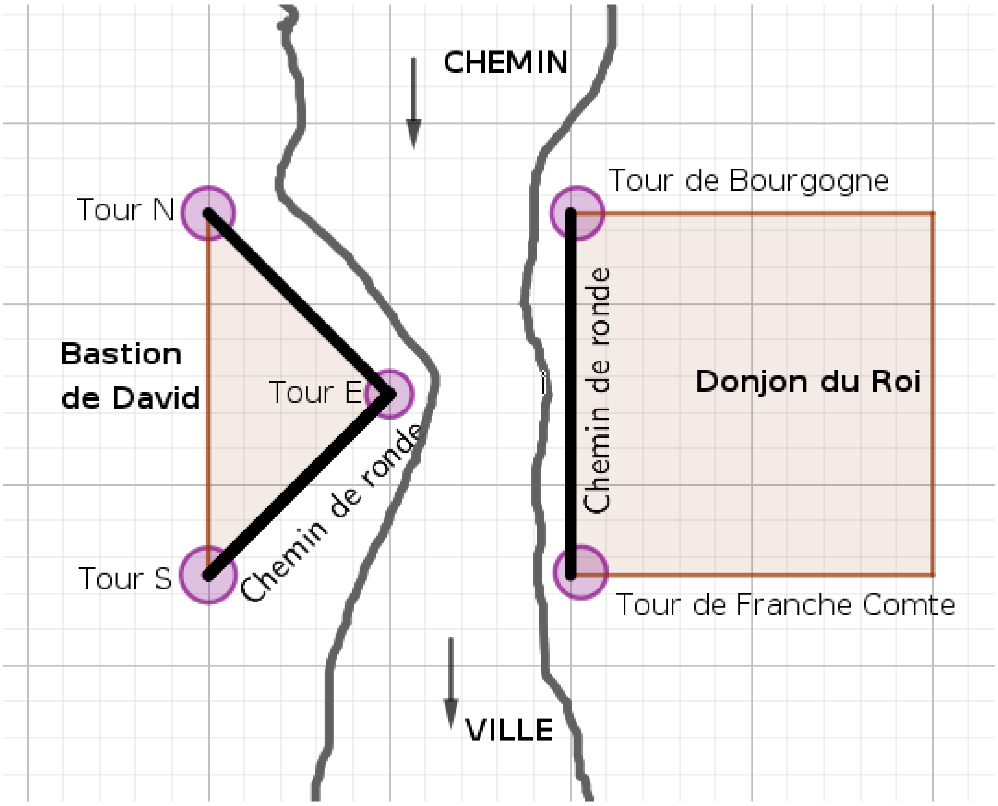
5- a) Expliquer pourquoi on a $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout entier naturel n non nul.
   b) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = u_n + 1$.
      Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $v_{n+1} = 2v_n$
      On admet alors que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = 2^{n-1}\ v_1$.
   c) En déduire une expression de u_n en fonction de n.

6- On dispute une partie de tours de Hanoï avec 20 disques sur la première tour.
   En admettant que 3 secondes sont nécessaires pour déplacer un disque, combien de temps faut-il, au minimum, pour terminer la partie ? On exprimera le résultat dans une unité adaptée.

7- a) On souhaite déplacer tous les disques en 2020 étapes au maximum. Déterminer le nombre maximal N de disques qu'on peut placer sur la première tour ?
   b) On souhaite déplacer tous les disques en M étapes au maximum. Ecrire un algorithme permettant de déterminer le nombre maximal N de disques qu'on peut placer sur la première tour.

Annexe

BROUILLON



NOMS et Prénoms des élèves du groupe :

Établissement :

Annexe

A RENDRE AVEC LA COPIE