OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE BESANÇON
2021

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

21e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

BESANÇON 2021

Exercice 1 : Marche entre deux tours

Cet exercice est constitué de trois parties. La partie A est totalement indépendante des deux autres. En revanche, il existe un lien entre les parties B et C, lien qui n'est pas explicité par l'énoncé et que les concurrents des Olympiades devaient découvrir par eux-mêmes.

Partie A

Tout d'abord, rappelons la définition usuelle de la bissectrice d'un angle (au sens d'angle saillant délimité par deux demi-droites de même origine) :

« *La bissectrice d'un angle est la demi-droite issue du sommet de l'angle qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure* ».

La « bissectrice (Δ) » dont il est question dans l'énoncé est donc la demi-droite d'origine O qui partage l'angle saillant $\widehat{AOB}$ en deux angles adjacents de même mesure.

1. Soit M un point quelconque de la demi-droite (Δ), mais toutefois distinct de O (le point O étant sur les deux demi-droites en est trivialement équidistant). Désignons, comme il est suggéré dans l'énoncé, par M_1 et par M_2 les projections orthogonales de M sur les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ respectivement. Les distances MM_1 et MM_2 représentent les distances de M aux demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ respectivement.

Les points M_1 et M_2 étant projetés orthogonaux de M sur $[OA)$ et $[OB)$, les angles $\widehat{OM_1M}$ et $\widehat{OM_2M}$ sont des angles droits et les triangles OMM_1 et OMM_2 sont des triangles rectangles d'hypoténuse commune $[OM]$ et dans lesquels les côtés $[MM_1]$ et $[MM_2]$ sont les côtés opposés aux angles de sommet O.

On peut appliquer dans ces triangles rectangles les relations trigonométriques inhérentes aux triangles rectangles. En particulier : $\begin{cases} MM_1 = OM \times \sin\left(\widehat{MOM_1}\right) \\ MM_2 = OM \times \sin\left(\widehat{MOM_2}\right) \end{cases}$.

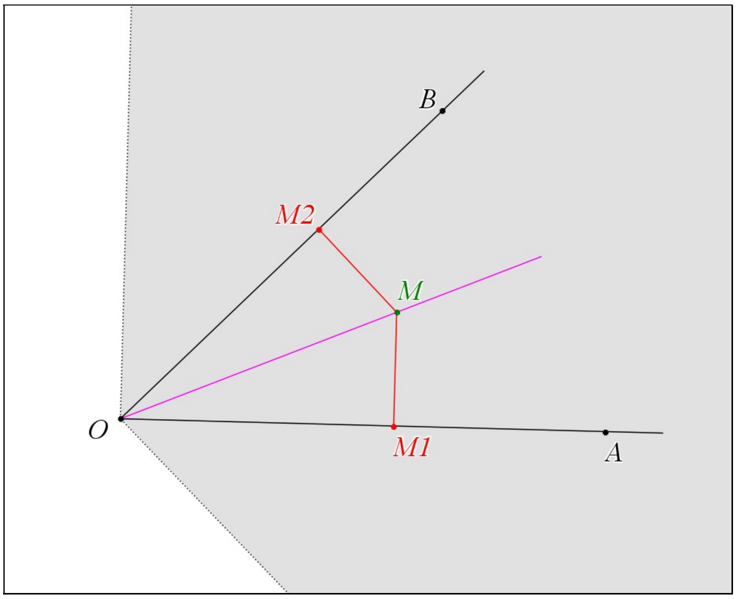
Mais, en vertu de la définition d'une bissectrice, les angles $M\hat{O}M_1$ et $M\hat{O}M_2$ sont des angles de même mesure, donc leurs sinus sont égaux : $\sin\left(M\hat{O}M_1\right)=\sin\left(M\hat{O}M_2\right)$

Par conséquent : $MM_1 = MM_2$, **le point *M* est équidistant des demi-droites [*OA*) et [*OB*).**

2. Réciproque.

On suppose que *M* est distinct de *O* (le point *O* étant trivialement sur la bissectrice (Δ)).

L'hypothèse selon laquelle *M* est « équidistant des demi-droites [*OA*) et [*OB*) » sous-entend alors que les projetés orthogonaux M_1 et M_2 de *M* sur les droites (*OA*) et (*OB*) appartiennent strictement aux demi-droites [*OA*) et [*OB*). (*M* est forcément un point situé strictement à l'intérieur de la partie grisée de la figure ci-contre).



Les points M_1 et M_2 étant les projetés orthogonaux de *M* sur [*OA*) et [*OB*), les triangles OMM_1 et OMM_2 sont deux triangles rectangles en M_1 et en M_2 d'hypoténuse commune [*OM*].

On peut y appliquer dans l'un et dans l'autre le théorème de Pythagore : $\begin{cases} OM^2 = OM_1^2 + MM_1^2 \\ OM^2 = OM_2^2 + MM_2^2 \end{cases}$ et par conséquent : $\begin{cases} OM_1 = \sqrt{OM^2 - MM_1^2} \\ OM_2 = \sqrt{OM^2 - MM_2^2} \end{cases}$

Or, en raison de l'hypothèse d'équidistance de *M* aux deux demi-droites : $MM_1 = MM_2$.

Il en résulte que : $OM_1 = OM_2$. Les triangles OMM_1 et OMM_2 ont leurs trois côtés homologues deux à deux égaux, ils sont superposables. Puisque ces triangles sont superposables, leurs angles homologues sont de même mesure.

En particulier : $M\hat{O}M_1 = M\hat{O}M_2$. Donc, **le point *M* appartient à la bissectrice (Δ) de l'angle $A\hat{O}B$.**

En résumé des questions **1** et **2**, la propriété d'équidistance aux deux demi-droites [*OA*) et [*OB*) caractérise l'appartenance à la bissectrice de l'angle $A\hat{O}B$.

Partie B

1.a. La droite (d) est une parallèle à l'axe Ox. Les droites qui lui sont perpendiculaires sont les parallèles à l'axe Oy. La perpendiculaire en M à (d) est de ce fait la droite d'équation $x = x_M$. Le point M' étant à la fois sur (d) et sur la perpendiculaire en M à (d) a pour coordonnées $(x_M\ ;\ -1)$.

1.b. Le repère $(O\ ;\vec{I}, \vec{J})$ en jeu étant orthonormé et compte tenu de la formule rappelée dans l'énoncé :

$$MP = \sqrt{x_M{}^2 + (y_M - 1)^2} = \sqrt{x_M{}^2 + y_M{}^2 - 2y_M + 1} \text{ et } MM' = \sqrt{(y_M - (-1))^2} = |y_M + 1|.$$

1.c. Un point $M(x_M\ ;\ y_M)$ du plan est équidistant de P et de la droite (d) si et seulement si $MP = MM'$, c'est-à-dire si et seulement si : $\sqrt{x_M{}^2 + y_M{}^2 - 2y_M + 1} = |y_M + 1|$.

L'égalité de ces deux nombres positifs équivaut à celle de leurs carrés, soit à l'égalité :

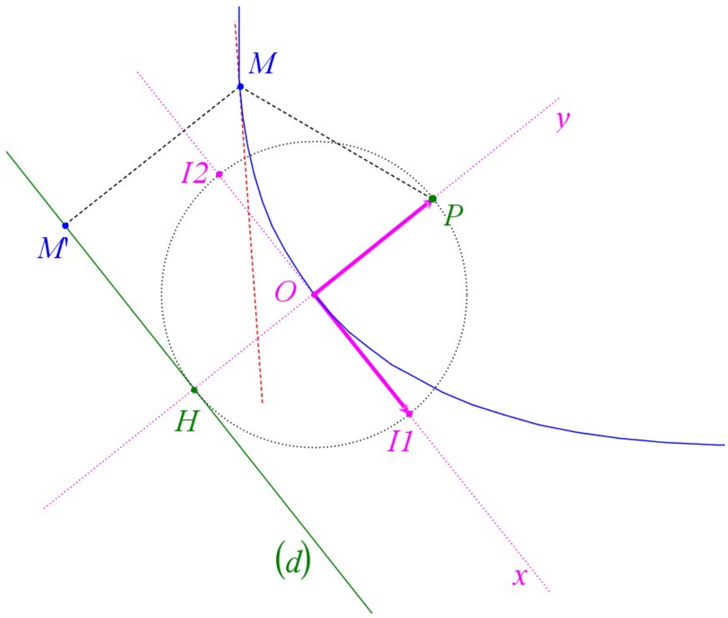
$x_M{}^2 + y_M{}^2 - 2y_M + 1 = (y_M + 1)^2$ ou, ce qui revient au même, à l'égalité : $x_M{}^2 - 4y_M = 0$

Un point $M(x_M\ ;\ y_M)$ du plan est équidistant de P et de la droite (d) si et seulement si il appartient à la courbe d'équation cartésienne dans le repère orthonormé $(O\ ;\vec{I}, \vec{J})$: $x^2 - 4y = 0$.

On remarque qu'une autre équation cartésienne de cette même courbe est l'équation : $y = \dfrac{x^2}{4}$. Sous cette forme, on reconnaît l'équation d'une parabole dont le sommet est l'origine du repère.

2.a. La droite (d) et le point P non situé sur (d) étant donnés (en vert sur la figure ci-contre), on considère le projeté orthogonal H de P sur la droite (d) et le milieu O du segment $[HP]$. On trace la parallèle en O à la droite (d). Le cercle de centre O passant par P coupe cette parallèle en deux points I_1 et I_2.

De ce fait les vecteurs $\overrightarrow{OI_1}$, $\overrightarrow{OP}$ et aussi bien les vecteurs $\overrightarrow{OI_2}$, $\overrightarrow{OP}$ sont des vecteurs orthogonaux et de même norme.



Ces deux vecteurs n'ont certes aucune raison d'avoir pour norme 1. Cependant, rien dans l'énoncé ne nous impose le choix d'une unité de longueur. Rien ne nous empêche de décréter que l'on va désormais prendre comme unité de longueur la distance *OP* c'est-à-dire la moitié de la distance de *P* à la droite (d).

On choisit alors l'un ou l'autre des deux repères $\left(O\,;\overrightarrow{OI_1},\overrightarrow{OP}\right)$ ou bien $\left(O\,;\overrightarrow{OI_2},\overrightarrow{OP}\right)$ qui sont désormais, en raison de notre décret, des repères orthonormés.

2.b. Nous pouvons appliquer ce qui a été vu en **2.a** : L'ensemble des points équidistants de *P* et de (d) est la parabole qui a pour équation cartésienne, dans le repère que nous avons choisi et que nous avons normé, l'équation $y=\dfrac{x^2}{4}$. Un point remarquable de cet ensemble est bien entendu le point *O*, milieu du segment [*HP*], que nous avons défini en début de question.

Nous avons représenté cet ensemble en bleu sur la figure.

NB. En cas de scrupule à changer d'unité, on désignerait par *R* le rayon du cercle évoqué ci-dessus, lequel rayon vérifie : $R=\left\|\overrightarrow{OI_1}\right\|=\left\|\overrightarrow{OI_2}\right\|=\left\|\overrightarrow{OP}\right\|$ et l'on choisirait le repère $\left(O\,;\dfrac{1}{R}\overrightarrow{OI_1},\dfrac{1}{R}\overrightarrow{OP}\right)$ ou bien son collègue $\left(O\,;\dfrac{1}{R}\overrightarrow{OI_2},\dfrac{1}{R}\overrightarrow{OP}\right)$. Le point *P* aurait pour coordonnées $(0\,;\,R)$ et la droite (d) aurait pour équation : $y=-R$.

La relation $MP=MM'$ équivaut à $\sqrt{{x_M}^2+{y_M}^2-2R\times y_M+R^2}=\left|y_M+R\right|$ ou aussi bien à : ${x_M}^2-4R\times y_M=0$**.**

Un point $M\left(x_M\,;\,y_M\right)$ du plan est équidistant de *P* et de la droite (d) si et seulement si il appartient à la courbe d'équation cartésienne $x^2-4R\,y=0$.

On remarque qu'une autre équation cartésienne de cette même courbe est l'équation : $y=\dfrac{x^2}{4R}$. Sous cette forme, on reconnaît l'équation d'une parabole dont le sommet est l'origine du repère. Cette parabole se déduit de la parabole d'équation cartésienne : $y=\dfrac{x^2}{4}$ évoquée en **1.c** par l'homothétie de centre *O* et de rapport *R*. Le changement d'unité n'impacte en rien la conclusion de cette question.

Remarque hors énoncé :

Tout point *M* de cette parabole, de projeté orthogonal *M'* sur (d), est équidistant de *P* et de *M'*. La médiatrice du segment [*M'P*] (en pointillés rouges sur la figure) passe par *M*. On pourrait démontrer qu'il s'agit de la tangente en *M* à la parabole. Lorsque *M'* décrit la droite (d), cette médiatrice « enveloppe » la parabole, en balayant toute la partie du plan extérieure. En revanche, aucune médiatrice ne passe par un point intérieur à la parabole, dans sa concavité.

Partie C

Modélisons la situation.

D'abord, assimilons les tours à des points N, S, E, B (pour « Bourgogne ») et F (pour « Franche Comté »).

Ensuite, observons le filigrane millimétré de la figure fournie par l'énoncé : ce filigrane nous indique que le quadrilatère $NSFB$ est un carré et que le point E en est le centre.

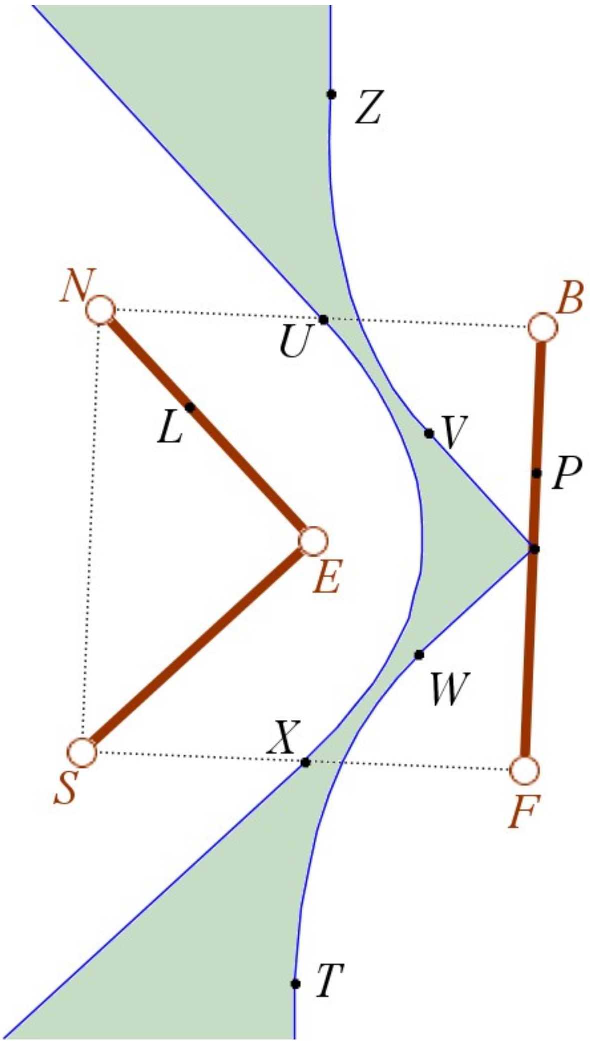
Enfin, tentons de traduire mathématiquement l'étrange manière de garder les accès à la ville et surtout celle d'échapper à la surveillance.

Désignons par L et par P les positions des deux guetteurs Lancelot et Perceval à un instant donné. D'après l'énoncé, l'assaillant, pour ne pas être vu, **doit être constamment sur la médiatrice du segment [PL] qui joint les deux gardes**.

C'est ici qu'intervient dans la discussion la « **remarque hors énoncé** » du **2.b** de la partie précédente.

- Lorsque Lancelot L se déplace de N à E, Perceval reste fixe en B. On trace l'arc de parabole lieu des points équidistants de B et du segment [NE] (cet arc va de Z à V sur la figure) que l'on prolonge par ses tangentes aux extrémités. Si l'assaillant se trouve dans la concavité de ce tracé, il se fera repérer à coup sûr, aucune médiatrice d'aucun segment [BL] ne passe là.
- Lorsque Perceval P se déplace de B à F, Lancelot reste fixe en E. On trace l'arc de parabole lieu des points équidistants de E et du segment [BF] (cet arc va de U à X sur la figure) que l'on prolonge par ses tangentes aux extrémités. Si l'assaillant se trouve dans la concavité de ce tracé, il se fera repérer à coup sûr, aucune médiatrice d'aucun segment [PE] ne passe là.
- Lorsque Lancelot L se déplace de E à S, Perceval reste fixe en F. On trace l'arc de parabole lieu des points équidistants de F et du segment [ES] (cet arc va de W à T sur la figure) que l'on prolonge par ses tangentes aux extrémités. Si l'assaillant se trouve dans la concavité de ce tracé, il se fera repérer à coup sûr, aucune médiatrice d'aucun segment [FL] ne passe là.

On constate graphiquement qu'il reste un « corridor » extérieur à la concavité de tous les tracés (colorié en vert clair sur la figure). Pour avoir une chance de ne pas être repéré, il est nécessaire que l'assaillant traverse la zone surveillée en se trouvant toujours dans ce corridor.



Cette condition n'est bien entendu pas suffisante, mais la condition suffisante, à savoir « se trouver à tout instant sur la bonne médiatrice » ne nous concerne pas, elle ne concerne que l'assaillant.

La réponse à la question posée est :

« Oui, l'assaillant a une (petite) chance de passer sans se faire repérer ».

Ceci, à la condition expresse de choisir à tout instant la « bonne médiatrice ». Il pourra ainsi aller allègrement piller la ville...

Moralité : Toute vérité n'est pas toujours bonne à dire.

Exercice 2 : Nombre de coloriages

Considérons généralement un tableau formé de trois lignes et de n colonnes. Chaque case de ce tableau peut être caractérisée par son numéro i de ligne ($i = 1, 2$ ou 3) et son numéro j de colonne ($j = 1, 2, ..., n$).

La contrainte formulée par l'énoncé est respectée si pour tout i égal à 1 ou 2 et tout j égal à $1, 2, ..., n-1$, les cases $(i+1, j)$ et $(i, j+1)$ sont d'une couleur autre que celle de la case (i, j).

1.a. Le rectangle 2 ne respecte pas la contrainte car les cases (1, 1) et (2,1) ont la même couleur. Le rectangle 4 ne respecte pas la contrainte car les cases (2, 1) et (2, 2) ont la même couleur. Les autres rectangles respectent la contrainte, aucune des deux circonstances évoquées ci-dessus ne se produit.

1.b. Voici en extension la liste des coloriages possibles. Il y a six coloriages tricolores, et six autres bicolores :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} A \\ C \\ B \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} B \\ A \\ C \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} B \\ C \\ A \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} C \\ A \\ B \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} C \\ B \\ A \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} A \\ B \\ A \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} A \\ C \\ A \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} B \\ A \\ B \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} B \\ C \\ B \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} C \\ A \\ C \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} C \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

En tout, 12 coloriages différents.

2.a. On peut compléter le tableau successivement ainsi :

	1	2	3
1	**C**	**A**	**C**
2	**B**	**C**	**B**
3	**A**	**B**	**A ou C**

- Les cases (2, 2) et (1,3) ont pour voisines une case coloriée en A et une autre coloriée en B : elles doivent avoir la couleur C.
- Les cases (2, 1) et (3,2) ont pour voisines une case coloriée en A et une autre coloriée en C : elles doivent avoir la couleur B.
- La case (1, 1) a pour voisines une case coloriée en A et une autre coloriée en B : elle doit avoir la couleur C.
- La case (3, 3) a deux voisines coloriées en B : elle peut être coloriée en A ou en C.

Il y a donc deux coloriages possibles qui ne diffèrent l'un de l'autre que par la couleur de la case (3, 3).

2.b. Considérons dans les tableaux proposés la case $(1, n+1)$. Elle a pour voisine une case coloriée en A, elle peut être coloriée en B ou en C (2 possibilités).

- Si elle est coloriée en B, alors la case $(2, n+1)$ a deux voisines toutes deux coloriées en B : elle peut être coloriée en A ou en C.
- Si elle est coloriée en C, alors la case $(2, n+1)$ a deux voisines l'une coloriée en B, l'autre en C : elle doit nécessairement être coloriée en A.

Nous obtenons donc pour le moment trois cas de figure, quel que soit l'état de la troisième ligne :

A	**B**
B	**A**
-	**-**

ou bien

A	**B**
B	**C**
-	**-**

ou bien

A	**C**
B	**A**
-	**-**

La distinction entre les cas 1 et 2 porte désormais sur la couleur de la case $(3, n+1)$:

Cas 1 :

A	**B**
B	**A**
A	**B ou C**

ou bien

A	**B**
B	**C**
A	**B**

ou bien

A	**C**
B	**A**
A	**B ou C**

Nous distinguons cinq coloriages différents. On note que trois coloriages de la colonne $(n+1)$ sont bicolores et les deux autres tricolores (cette remarque sera utile pour la question **4.a**).

Cas 2 :

A	**B**
B	**A**
C	**B**

ou bien

A	**B**
B	**C**
C	**A ou B**

ou bien

A	**C**
B	**A**
C	**B**

Nous distinguons quatre coloriages différents. On note que deux coloriages de la colonne $(n+1)$ sont bicolores et les deux autres tricolores (cette remarque sera utile pour la question **4.a**).

3. D'après le nombre d'éléments de la liste donnée dans la question **1.b**, $c_1 = 12$.

Parmi les 12 états possibles de la colonne 1, nous en distinguons 6 qui sont conformes au « cas 1 » (il y a pour chacun 5 façons possibles de colorier la colonne suivante numéro 2) et 6 autres qui sont conformes au « cas 2 » (il y a pour chacun 4 façons possibles de colorier la colonne suivante numéro 2). Au total, il y a $5\times 6 + 4\times 6 = 54$ façons possibles de colorier globalement les deux colonnes, c'est pourquoi $c_2 = 54$.

4.a. D'après les remarques faites dans la question **2.b**, chaque coloriage bicolore de la colonne numéro n engendre trois coloriages bicolores et deux coloriages tricolores possibles dans la colonne suivante, tandis que chaque coloriage tricolore de la colonne numéro n engendre deux coloriages de chaque sorte possibles dans la colonne suivante.

Donc, si on ajoute une colonne à droite des tableaux pour en construire des nouveaux plus longs d'une colonne, b_n tableaux à coloriages bicolores de leur dernière colonne numéro n engendrent $3b_n$ coloriages bicolores et $2b_n$ coloriages tricolores dans leur nouvelle colonne à droite, tandis que t_n tableaux à coloriages bicolores de leur dernière colonne numéro n engendrent $2t_n$ coloriages de chaque sorte dans leur nouvelle colonne à droite.

Ce qui justifie les formules de récurrence : $\begin{cases} b_{n+1} = 3b_n + 2t_n \\ t_{n+1} = 2b_n + 2t_n \end{cases}$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

4.b. Considérons, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression $c_{n+1} - 5c_n + 2c_{n-1}$.

Dans un premier temps, d'après la définition de c_n : $c_{n+1} - 5c_n + 2c_{n-1} = \left(b_{n+1} + t_{n+1}\right) - 5\left(b_n + t_n\right) + 2\left(b_{n-1} + t_{n-1}\right)$

Dans un deuxième temps, en appliquant au rang n les formules de récurrence précédentes :

$$c_{n+1} - 5c_n + 2c_{n-1} = \left(\left(3b_n + 2t_n\right) + \left(2b_n + 2t_n\right)\right) - 5\left(b_n + t_n\right) + 2\left(b_{n-1} + t_{n-1}\right) = -t_n + 2\left(b_{n-1} + t_{n-1}\right)$$

Or, en écrivant pour au rang antérieur $n - 1 \geq 1$ la deuxième formule de récurrence : $t_n = 2b_{n-1} + 2t_{n-1}$.

Nous obtenons ainsi pour $n \geq 2$: $c_{n+1} - 5c_n + 2c_{n-1} = -\left(2b_{n-1} + 2t_{n-1}\right) + 2\left(b_{n-1} + t_{n-1}\right) = 0$

La suite $\left(c_n\right)$ est déterminée par ses deux premiers termes $c_1 = 12$; $c_2 = 54$ et, pour tout entier $n \geq 2$, par la relation de récurrence : $c_{n+1} - 5c_n + 2c_{n-1} = 0$.

Soit, aussi bien : $c_{n+1} = 5c_n - 2c_{n-1}$ conformément à l'énoncé.

5. Si l'on calcule les termes de rang 3 et 4, on doit obtenir : $c_3 = 5\times 54 - 2\times 12 = 246$ puis $c_4 = 5\times 246 - 2\times 54 = 1122$.
 	
Le programme Python ci-contre semble convenir comme réponse à la question.
 	
Son argument *n* est le nombre de colonnes du tableau, le programme **coloriages** renvoie le nombre de coloriages dudit tableau.
	<pre>>>> def coloriages(n):
	        c=12
	        d=54
	        for k in range(2,n+1):
	                x=c
	                y=d
	                c=d
	                d=5*y-2*x
	        return c
	
	>>> coloriages(2)
	54
	>>> coloriages(3)
	246
	>>> coloriages(4)
	1122
	>>> coloriages(6)
	23346</pre>

6. Nous répondons à la question à l'aide d'un nouveau programme Python, nommé **nbrcolor**, variante du précédent.
 	
Son argument est maintenant le seuil **« a »** que l'on se propose de dépasser par le nombre de coloriages. Nous avons à cet effet remplacé la boucle « **For** ... » par une boucle « **While** ... ».
 	
Le programme renvoie le nombre minimal de colonnes permettant de dépasser le seuil donné et le nombre de coloriages correspondants.
 	
Il est d'abord testé pour les seuils 1000 et 10000. Il faut effectivement 4 colonnes pour dépasser le seuil de 1000 coloriages et 6 colonnes pour dépasser le seuil de 10000 coloriages, ce qui est bien conforme aux résultats déjà obtenus.
	<pre>>>> def nbrcolor(a):
	        c=12
	        d=54
	        n=1
	        while c<a:
	                x=c
	                y=d
	                c=d
	                d=5*y-2*x
	                n=n+1
	        return [n,c]
	
	>>> nbrcolor(1000)
	[4, 1122]
	>>> nbrcolor(10000)
	[6, 23346]
	>>> nbrcolor(1000000000)
	[14, 4376370546]
	>>> nbrcolor(10**9)
	[14, 4376370546]</pre>

Ce programme nous dit qu'il faut **un tableau de 14 colonnes pour dépasser le seuil d'un milliard** de coloriages et que dans ce cas le nombre de coloriages différents est égal à 4376370546.

Bigre !