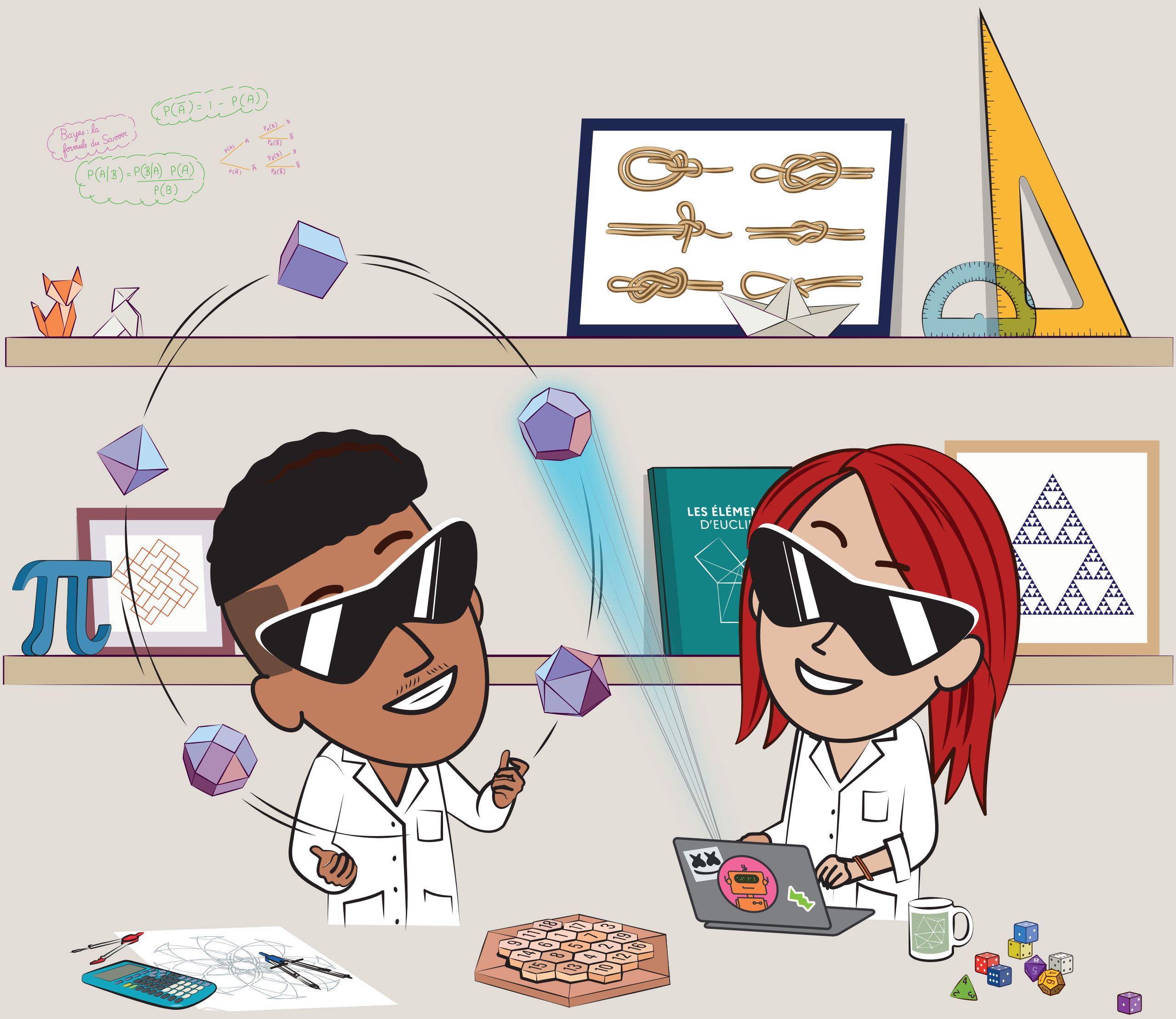
OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE D'AIX-MARSEILLE
2023

SUJET DE L'ÉPREUVE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

OLYMPIADES NATIONALES 2023
DE MATHÉMATIQUES



Épreuve le mercredi 15 mars 2023 (le 14 en Polynésie française). 4 exercices en 4 heures.
Palmarès national et académiques, en individuel et par équipes mixtes (de 2, 3 ou 4), selon cursus (technologique, général, général spécialité mathématiques).
Inscriptions auprès de vos professeurs de mathématiques jusqu'au 17 février 2023.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades académiques – mathématiques – 2023

Académie d'Aix-Marseille

Mercredi 15 mars 2023

Les calculatrices sont autorisées selon la règlementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Exercices académiques

Cette sous-épreuve comporte deux exercices, à traiter dans le temps imparti.

Les binômes composés de candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité doivent traiter les exercices n°1 et n°2.

Les autres binômes doivent traiter les exercices n°1 et n°3.

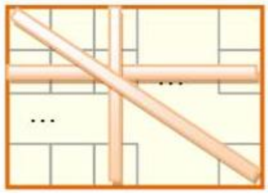
Pour chaque binôme une seule copie est à rendre, avec le nom des deux élèves ayant composé.

Durée de la composition : 2 heures

Ce sujet comporte **9** pages dont celle-ci.

Exercice n°1 **Les carrés magiques** *(pour tous les binômes de candidats)*

Définition :



Un **carré magique d'ordre *n*** est composé de tous les nombres entiers de 1 à n^2, écrits sous la forme d'un tableau carré $n \times n$.
Ces nombres sont disposés de sorte que leur somme sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur chaque diagonale soient égales.
On nomme alors **constante magique** la valeur de ces sommes.

Exemple :

Le carré de Dürer ci-dessous est un carré magique d'ordre 4 de constante magique 34.

				34
16	**3**	**2**	**13**	34
5	**10**	**11**	**8**	34
9	**6**	**7**	**12**	34
4	**15**	**14**	**1**	34
34	34	34	34	34

1. **Le carré magique d'ordre 1**

Donner le seul carré magique d'ordre 1.

2. **Pas de carré magique d'ordre 2**

Montrer qu'il n'existe pas de carré magique d'ordre 2.

3. **Les carrés magiques d'ordre 3**

a) Préciser les entiers que composent un carré magique d'ordre 3 et en déduire la constante magique.

b) Déterminer de combien de façon différentes on peut décomposer 15 comme somme de trois entiers distincts parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

c) En déduire que 5 est au centre d'un carré magique d'ordre 3 et que les coins de ce carré sont constitués de nombres pairs.

d) Construire un carré magique d'ordre 3.

e) En déduire les sept autres par rotations ou symétries.

4. Les cubes magiques d’ordre 3

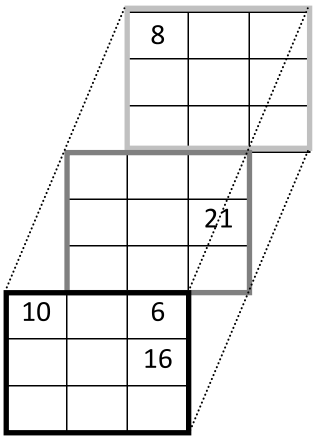
Un **cube magique d’ordre 3** est l'équivalent tridimensionnel d'un carré magique, composé de tous les nombres entiers de 1 à 27, écrits sous la forme d’un tableau cubique $3 \times 3 \times 3$. Ces nombres sont disposés de sorte que leurs sommes sur chaque ligne, sur chaque colonne, sur chaque profondeur et sur chaque diagonale principale (c'est-à-dire reliant 2 sommets opposés) soient égales. On nomme alors **constante magique** la valeur de ces sommes.

Attention, les sommes sur les diagonales de chaque face n’ont aucune raison de donner la constante magique.

a) Donner la constante magique du cube magique d’ordre 3.

b) Combien de sommes différentes dans le cube magique d’ordre 3 donnent cette constante magique ?

c) Compléter le cube magique suivant.



5. Les carrés et cubes magiques d’ordre n.

On admettra que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout entier naturel n.

a) Montrer que la constante magique pour un carré magique d’ordre n est $\frac{n(n^2+1)}{2}$ pour tout entier naturel n.

b) Montrer que la constante magique pour un cube magique d’ordre n est $\frac{n(n^3+1)}{2}$ pour tout entier naturel n.

Exercice n°2 **p-couples** *(pour les binômes ayant suivi l'enseignement de spécialité mathématiques de la voie générale)*

Soit p un entier naturel non nul.

On appelle ***p*-couple** un couple $(a\,;b)$ d'entiers naturels non nuls qui vérifie $a \leq b$ et $ab = p(a+b)$.

Par exemple, (6 ; 30) est un 5-couple car on a 6 ≤ 30 et 6 × 30 = 5× (6 + 30).

PARTIE I

1. Justifier que (12 ; 60) est un 10-couple. (4 ; 16) est-il un 10-couple ?

2. a) Justifier que (10 ; 3) ne peut pas être un p-couple.

b) Existe-t-il un entier naturel non nul p tel que (3 ; 5) soit un p-couple ?

c) Pour quelle valeur de l'entier naturel non nul p le couple (3 ; 6) est-il un p-couple ? Justifier.

3. On considère le couple $(a\,;b)$.
Si $(a\,;b)$ est un 10-couple peut-on affirmer que $(a^2\,;\ b^2)$ est un 100-couple ? Justifier.

4. Soient m et p deux entiers naturels non nuls.
Montrer que si $(x; y)$ est un p-couple alors est un $(mx\,; my)$ est un mp-couple.
La réciproque est-elle vraie ?

PARTIE 2

1. a) Deux nombres entiers sont dits **premiers entre eux** si ils n'ont aucun diviseur commun autre que 1.
Montrer que pour tout entier a strictement positif, $a-1$ et a sont premiers entre eux.

b) Montrer que si $(a\,;b)$ est un 1-couple, alors $a-1$ est un diviseur de a.
En déduire qu'il n'existe qu'un seul 1-couple et donner cet unique 1-couple.

2. On considère $(a\,;b)$ un 2-couple.

a) Montrer qu'alors $(a-2)(b-2) = 4$.

b) Montrer qu'il n'existe que deux 2-couples, donner leur liste.

3. Montrer que $(a\,;b)$ est un p-couple si et seulement si $(a-p)(b-p) = p^2$ avec $a \leq b$.

4. Pour cette question, on considère que p est un nombre premier.
En utilisant la question 3, déterminer le nombre de p-couples.

5. Dresser la liste de tous les 4-couples puis déterminer le nombre de 100-couples en expliquant le raisonnement.

PARTIE 3

Le plan est muni d'un repère orthogonal d'origine O. Soit p un entier naturel non nul, on appelle ***p*-point** tout point dont le couple de coordonnées est un p-couple. Par exemple, le point de coordonnées (12 ; 60) est un 10-point puisque (12 ; 60) est un 10-couple.

Le but de cette partie est d'obtenir quelques résultats concernant la répartition des p-points dans le plan

Soient x et y deux entiers naturels non nuls avec $x \leq y$.

1. Recopier et compléter en langage Python la fonction « point(x, y) » ci-contre afin qu'elle permette de tester si (x ; y) sont les coordonnées d'un p-point.

On rappelle que l'instruction Python a % b renvoie le reste de la division euclidienne de l'entier a par l'entier non nul b.

```
def point(x,y)
 if …………….. :
    return True
    else :
    return False
```

2. Avec des droites.

a) On considère la droite d'équation $y = x$.
Montrer que pour tout entier naturel p non nul, cette droite contient un p-point.
Donner la liste de ces p-points.

b) On considère la droite d'équation $y = x + 1$.
Cette droite contient-elle un p-point ? Justifier.

c) Soit M un p-point.
On considère la droite (OM).
Montrer qu'il existe une infinité points de cette droite qui sont des n-points.

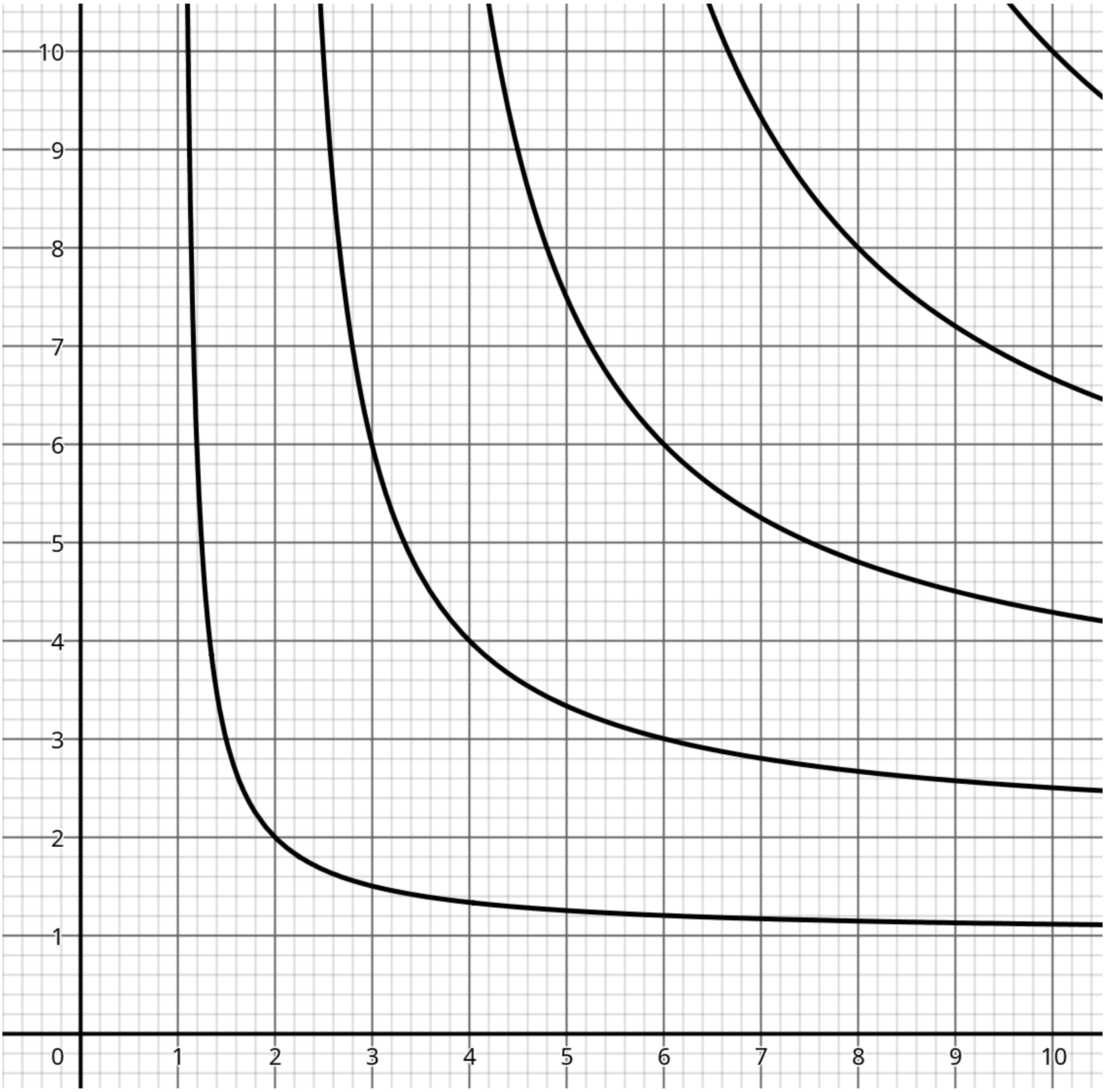
3. Avec la parabole P la parabole d'équation $y = x^2 - x$.

Montrer que pour tout entier naturel p, la parabole P contient un p-point.
Donner la liste de ces p-points.

4. Avec des hyperboles.

Pour tout entier naturel k, on définit la fonction f_k par $f_k(x) = \frac{kx}{x-k}$ pour $x > k$.
Sur le graphique ci-dessous on a tracé cinq hyperboles qui représentent les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5.

Donner tous les p-points présents dans sur ce graphique en justifiant la réponse.



Exercice n°3 **mathdoku** *(pour les binômes n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité mathématiques de la voie générale)*

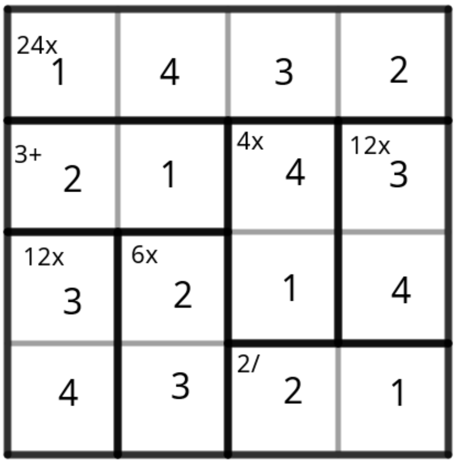
Les « mathdoku » sont une variante du célèbre jeu de Sudoku, où on doit placer des chiffres dans une grille de telle sorte que chaque chiffre n'apparaisse qu'une fois sur chaque ligne et chaque colonne.

Dans un « mathdoku » on a des contraintes supplémentaires : des régions sont délimitées dans la grille et, dans chaque région, un résultat et une opération sont notés. Ainsi, par exemple :

• « 12x » indique que le produit de toutes les chiffres de la région doit être égal à 12 ;
• et « 8+ » indique que la somme des toutes les chiffres de la région doit être égal à 8.

Les régions marquées par une division ou une soustraction ne sont constituées que de deux cases et, par exemple :
• « 2- » indique que la différence entre le plus grand et le plus petit chiffre de la région doit être égal à 2 ;
• et « 3/ » indique que le quotient du plus grand nombre de cette région par le plus petit doit être égal à 3.

Voici un exemple de « mathdoku » résolu sur une grille 4x4.



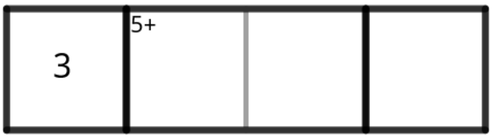
Il a dû être rempli avec les chiffres 1, 2, 3 et 4 ; et comme dans toute grille de type « sudoku », les chiffres ne sont présents qu'une seule fois dans chaque ligne et chaque colonne.

Les régions sont encadrées de traits foncés.

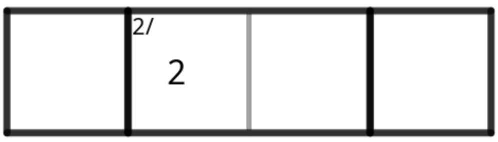
On voit que la première ligne est une région marquée « 24x » et que le produit des chiffres de cette région est bien 24 car 1 x 4 x 3 x 2 = 24.

On voit également que la région en bas à droite est marquée « 2/ » et que le quotient du plus grand chiffre de cette région par le plus petit est bien 2 car 2 / 1 = 2.

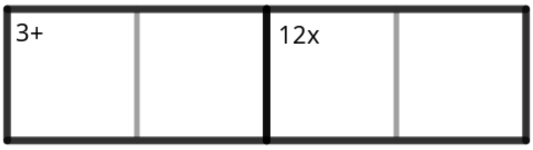
1) Voici une ligne extraite d'un « mathdoku » 4x4.
Quel chiffre doit être inscrit dans la case de droite ?



2) Voici une ligne extraite d'un autre « mathdoku » 4x4.
Donner toutes les manières possibles de la compléter.

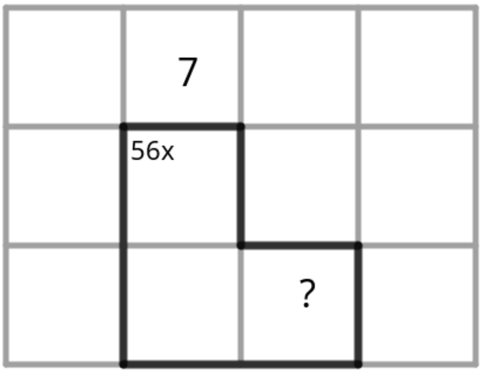


3) Même question sur cette autre ligne :



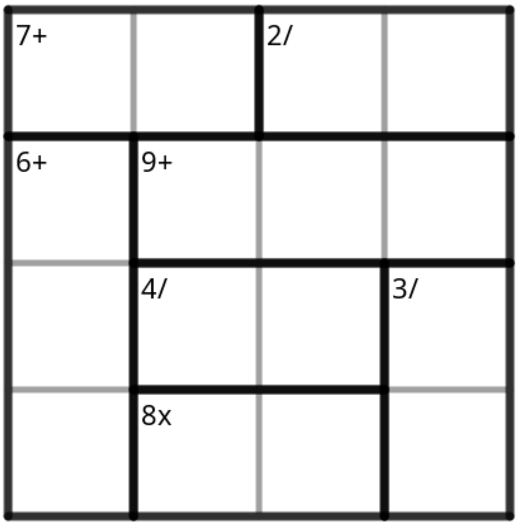
4) Voici une ligne d'un « mathdoku » 9x9, qui doit contenir tous les chiffres de 1 à 9.
Quel chiffre doit être inscrit dans la case de droite ?

5) Voici un extrait d'une grille de « mathdoku » de taille 9x9 en cours de résolution (un 7 a déjà été placé).
Déterminer le chiffre qui doit être inscrit dans la case marquée « ? ». Justifier la réponse

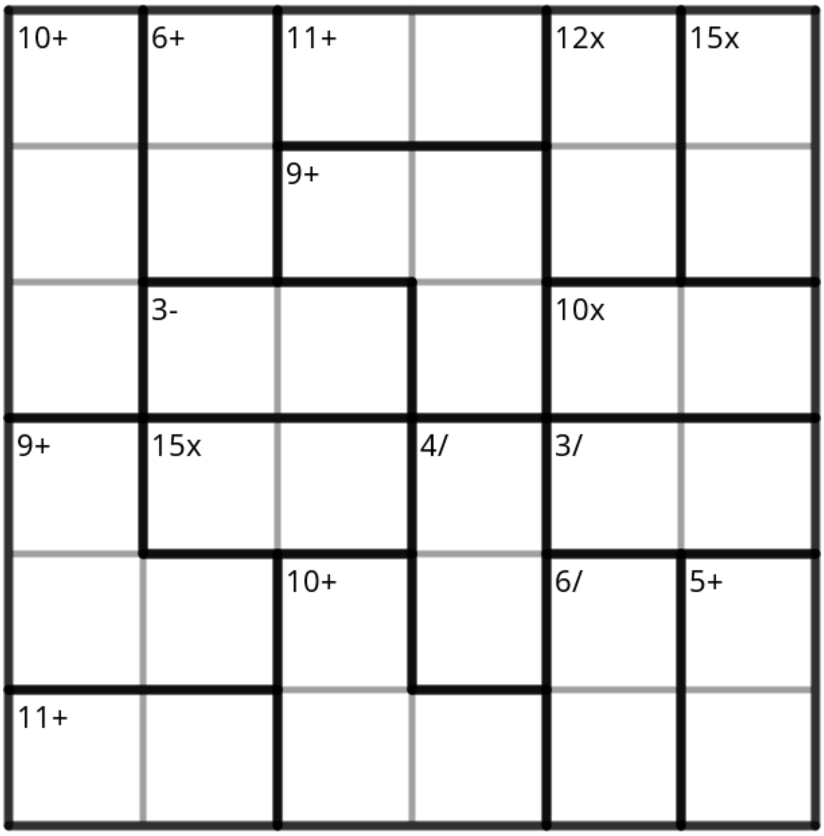


Maintenant vous avez les techniques pour résoudre les « mathdoku ». À vous de jouer !

6) Résoudre ce « mathdoku » 4x4 :



7) Résoudre ce « mathdoku » 6x6, en utilisant les chiffres de 1 à 6 :



8) On veut créer un algorithme vérifiant la résolution d'un « mathdoku » 4x4. Quelles sont les vérifications que doit effectuer cet algorithme ? *On ne demande pas d'écrire un algorithme, mais une explication en français de ce qui doit être vérifié.*

9) La fonction python ci-dessous a pour argument « liste », une liste de quatre entiers. Quelle vérification effectue-t-elle ?

```
def mystere( liste ) :

for i in range(4) :

   for j in range(i+1,4) :

      if liste[i]==liste[j] : return False

return True
```