OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE D'AIX-MARSEILLE 2022

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

AIX-MARSEILLE 2022

Exercice 1 : Opérations et géométrie tropicales

Partie I : Opérations tropicales et propriétés

1. a et b.

Question traitée avec TI-Nspire CAS.

Les fonctions de deux variables **at** et **mt** désignent respectivement l'addition et la multiplication tropicales. Résultats-ci-contre.

Define $at(x,y)=\min(x,y)$	*Terminé*
Define $mt(x,y)=x+y$	*Terminé*
$at(3,2)$	2
$at(2,-5)$	-5
$at\left(\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$
$mt(3,5)$	8
$mt(3,-5)$	-2
$mt\left(\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right)$	$\frac{11}{10}$

2. Propriétés

2.a. Le minimum de deux nombres est indépendant de leur ordre.

L'addition tropicale est commutative

2.b. Etant donnés trois nombres réels *a, b, c*, comparons $a\oplus(b\oplus c)$ avec $(a \oplus b) \oplus c$:

L'addition tropicale étant commutative, nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que $b \leq c$. Nous pouvons ainsi supposer que $b \oplus c = c$

- Si $a \leq b$, alors nous avons le rangement $a \leq b \leq c$ et dans ce cas :

$$(a \oplus b) \oplus c = a\oplus(b\oplus c) = a\oplus c = c$$

- Si $a > b$, alors $a \oplus b = b$ et dans ce cas $(a \oplus b) \oplus c = b \oplus c$. D'autre part, $a > b \Longrightarrow a > \min(b, c)$, donc $a \oplus (b \oplus c) = b \oplus c$ quel que soit le rangement de b et c. Dans ce cas également :
$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

Quel que soit le cas de figure, $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$.

L'addition tropicale est associative

2.c. Etant donnés trois nombres réels *a, b, c*, comparons $a \otimes (b \oplus c)$ avec $(a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$:

L'addition tropicale étant commutative, nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que $b \leq c$. Nous pouvons ainsi supposer que $b \oplus c = c$ donc que $a \otimes (b \oplus c) = a + c$.

$$\begin{cases} a \otimes b = a + b \\ a \otimes c = a + c \\ \quad b \leq c \end{cases} \Longrightarrow \min(a \otimes b, a \otimes c) = a + c = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$$

L'égalité $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ est vérifiée.

La multiplication tropicale est distributive par rapport à l'addition tropicale

2.d. La multiplication tropicale a pour élément neutre 0.

2.e. Quel que soit le réel *e*, quand $x > e$, nous avons : $x \oplus e = e \neq x$. Aucun nombre réel *e* ne peut être élément neutre pour l'addition tropicale.

Puisqu'il n'y a pas d'élément neutre pour l'addition tropicale, la notion « d'inverse additif » n'a pas de sens.

Il n'est pas possible de définir une soustraction tropicale

3. Puissances tropicales

3.a. Résultats ci-contre avec TI-Nspire

$mt(3,3)$	6
$mt(mt(^-2,^-2),^-2)$	$^-6$

3.b. Selon le rappel de l'énoncé sur la notation de la multiplication usuelle, $a^{"2"} = a + a = 2a = 2 \times a$.

- Si $a \geq \frac{1}{2}$, alors $a^{"2"} \oplus 1 = 1$ et $a^{"2"} \oplus 1 \oplus (2 \times a) = 1 \oplus (2 \times a) = 1$. Le résultat est égal à 1.
- Si $a < \frac{1}{2}$, alors $a^{"2"} \oplus 1 = 2 \times a$ et $(2 \times a) \oplus (2 \times a) = 2 \times a$. Le résultat est égal à $2a$.

3.c. D'après la définition qui en est donnée dans l'énoncé, la « multiplication tropicale » coïncide avec la somme usuelle. Nous savons que la somme usuelle de *n* nombres tous égaux à un même réel *a* est le nombre $n \times a$.

En conséquence, pour tout entier *n* strictement positif : $a^{"n"} = n \times a$ où « $\times$ » est le symbole de la multiplication usuelle.

Ce qui nous amène d'ailleurs à poser, conventionnellement, $a^{"0"} = 0$.

La « puissance tropicale *n*-ième » coïncide avec la multiplication usuelle par *n*

3.d. Par définition de l'addition tropicale, quels que soient les réels *a* et *b* : $a \oplus b = \min(a, b)$

D'après la caractérisation de la « puissance tropicale *n*-ième » vue dans la question précédente :

$$(a \oplus b)^{"n"} = (\min(a, b))^{"n"} = n \times \min(a, b)$$

D'autre part, pour tout entier naturel *n* : $\min(n \times a, n \times b) = n \times \min(a, b)$

(Si on multiplie deux réels quelconques par un même nombre positif *n*, l'ordre n'est pas modifié)

On en déduit : $a^{"n"} \oplus b^{"n"} = \min(n \times a, n \times b) = n \times \min(a, b)$, résultat identique à celui qui précède.

En conclusion :

$$a^{"n"} \oplus b^{"n"} = (a \oplus b)^{"n"}$$

4. Equations

Une des deux équations à résoudre a pour solutions l'ensemble des réels d'un intervalle, tandis que l'autre équation a une solution unique :

$$3 \oplus x = x \iff \min(3, x) = x \iff x \leq 3$$

$$x^{"2"} = -1 \iff 2x = -1 \iff x = -\frac{1}{2}$$

Partie II : Géométrie tropicale

1. Fonctions affines tropicales et droites tropicales

1.a et b. L'expression générale est $a \oplus x = x + a$. La « fonction linéaire tropicale $x \longmapsto a \oplus x$ » coïncide donc avec la fonction affine usuelle $x \longmapsto x + a$

En particulier $2 \oplus x = x + 2$. La représentation graphique de cette fonction est la droite d'équation $y = x + 2$. Nous la verrons en rouge et bleu sur la copie d'écran ci-dessous.

1.c. L'expression générale est :$(a \otimes x) \oplus b = \min\,(x + a, b)$. Détaillons :

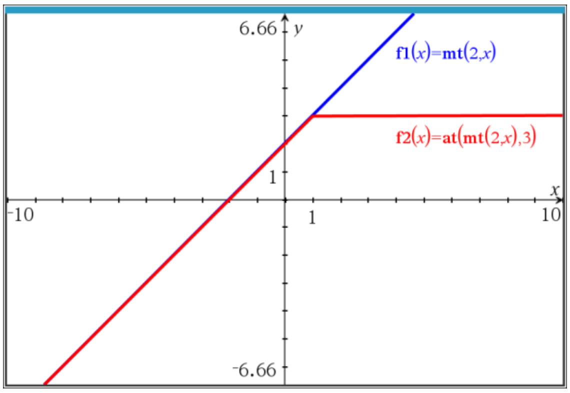
$$(a \otimes x) \oplus b = \begin{cases} x + a \text{ si } x \leq b - a \\ b \text{ si } x \geq b - a \end{cases}$$

La représentation graphique de cette fonction est la réunion de deux demi-droites d'extrémité commune le point $I\ (b - a, b)$, l'une parallèle à la droite d'équation $y = x$ et l'autre parallèle à l'axe *Ox*.

1.d. En particulier :

$(2 \otimes x) \oplus 3 = \min(x + 2{,}3) = \begin{cases} x + 2 \text{ si } x \leq 1 \\ 3 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

Représentation graphique exclusivement en rouge ci-contre. Il y a superposition partielle avec le tracé de la droite d'équation $y = x + 2$ qui nous était demandé à la question **1.b.**



2. Fonctions polynômes tropicales

2.a. $\begin{cases} a \otimes x^{\text{»}2\text{ »}} = a + 2 \times x \\ b \otimes x = b + x \end{cases} \implies (a \otimes x^{\text{»}2\text{ »}}) \oplus (b \otimes x) \oplus c = \min\,(2 \times x + a, x + b, c).$

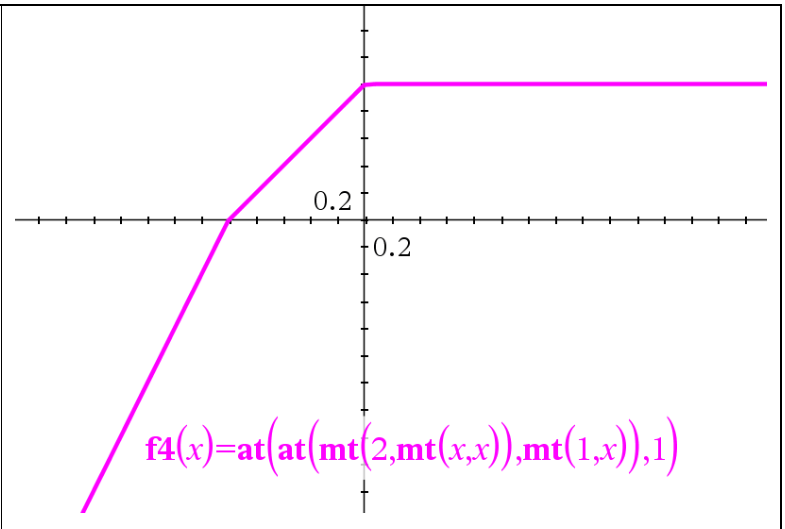
Le « polynôme tropical du second degré » de coefficients *a, b, c* coïncide avec le plus petit des trois nombres $2x + a$, $x + b$ et c.

2.b. En particulier : $\begin{cases} 2\otimes x^{«2»} = 2x+2 \\ 1\otimes x = x+1 \end{cases} \implies (2\otimes x^{«2»})\oplus(1\otimes x)\oplus 1 = \min(2x+2, x+1{,}1)$.

En notant que $2x+2 = 2\times(x+1)$:

- Si $x \leq -1$, alors $2x+2 \leq x+1 < 0 < 1$, le minimum est $2x+2$.
- Si $-1 \leq x \leq 0$, alors $\begin{cases} x+1 \leq 2x+2 \\ x+1 \leq 1 \end{cases}$, le minimum est $x+1$.
- Si $0 \leq x$, alors $1 \leq x+1 \leq 2x+2$, le minimum est 1.

Il s'agit d'une « fonction affine par morceaux ».

Ci-contre, représentation graphique du polynôme tropical en jeu. Il s'agit de la réunion de deux demi-droites et d'un segment.	

3. Points et droites tropicales

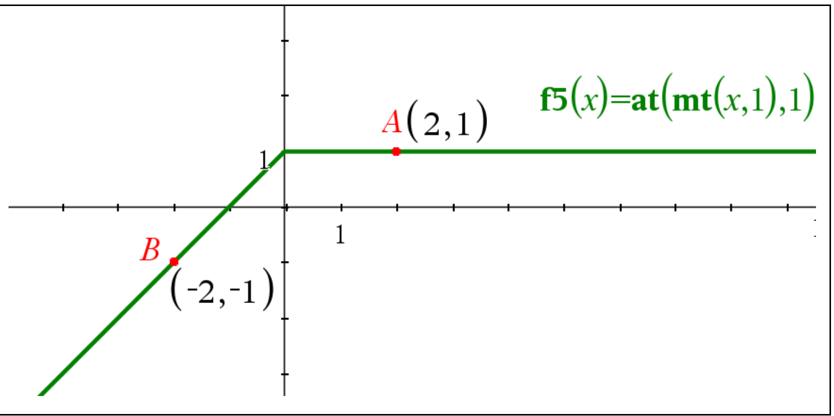
3.a. $(3\otimes x)\oplus 5 = \min(x+3{,}5) = \begin{cases} x+3 \text{ si } x \leq 2 \\ 5 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$. En particulier, $(3\otimes 2)\oplus 5 = 5$.

Nous en déduisons que le point B appartient à la droite tropicale en jeu, tandis que le point A n'appartient pas à cette droite.

3.b. De manière générale une droite tropicale d'équation $y = (a\otimes x)\oplus b = \min(x+a, b)$ a pour équation détaillée $y = \begin{cases} x+a \text{ si } x \leq b-a \\ b \text{ si } x \geq b-a \end{cases}$

Une droite tropicale passe par $A(2\,;1)$ et par $B(-2;-1)$ si l'on peut trouver a et b tels que : $\begin{cases} \min(2+a, b) = 1 \\ \min(-2+a, b) = -1 \end{cases}$

- Soit $\begin{cases} a+2 = 1 \leq b \\ -2+a = -1 \end{cases}$, conditions incompatibles.
- Soit $\begin{cases} b = 1 \leq a+2 \\ -2+a = -1 \end{cases}$ ce qui implique : $\begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$

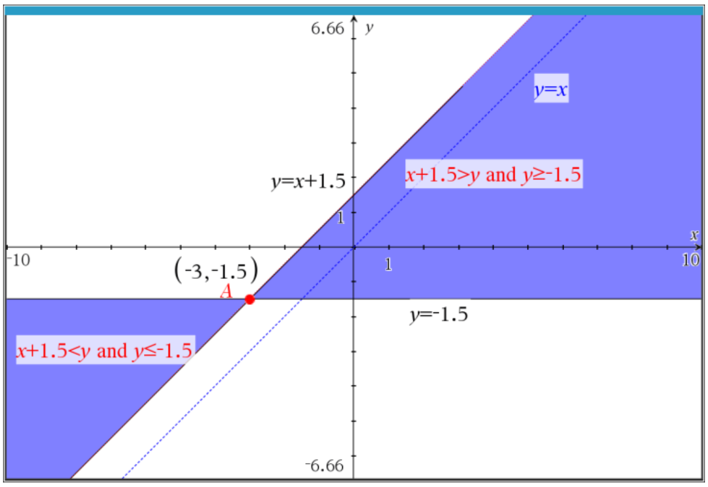
La droite tropicale en question est la droite d'équation $y = (1 \otimes x) \oplus 1$ représentée en vert ci-contre	

3.c. La droite parallèle à la droite d'équation $y = x$ passant par *A* est la droite (*d*) d'équation $y = x - 1$. Son point d'abscisse 3 est le point *C* de coordonnées $(3, 2)$. Le point $B(3,6)$ est situé au-dessus du point *C*.

Il est donc impossible de trouver un point *I* sur la droite (*d*) d'où l'on peut tracer une demi-droite $\begin{cases} y = y_I \\ x \geq x_I \end{cases}$ parallèle à *Ox* et passant par *C*.

3.d. *A* étant un point fixé du plan, on trace la parallèle (*d*) à la droite d'équation $y = x$ et passant par *A*. Pour qu'une droite tropicale unique passe par *A* et un autre point donné *B*, il faut pouvoir tracer deux demi-droites de même extrémité, comme indiqué plus haut, une passant par *A* et l'autre par *B*.

Suivant que *B* se trouve au-dessus ou au-dessous de la droite d'équation $y = y_A$, le point *B* doit se trouver strictement à droite ou à gauche de la droite (*d*). Il doit ainsi se trouver dans la zone bleue ci-contre.



Exercice 2 : Mélanger des cartes

Partie I : Un algorithme de mélange

1. Dénombrement

1.a et b. Il y a 2 façons de ranger un jeu de deux cartes et 6 façons de ranger un jeu de trois cartes.

1.c. Plus généralement, si on numérote les cartes de 1 à *n* et si on les range sur *n* places, lorsqu'on range la carte numéro *i*, il y a $(n + 1 - i)$ places disponibles pour cette carte puisque les $(i - 1)$ cartes précédentes ont déjà été rangées.

Le nombre de rangements des *n* cartes est égal au produit : $\prod_{i=1}^{n}(n + 1 - i)$.

Si l'on effectue le changement d'indice $j = n + 1 - i$, ce produit devient :

$$\prod_{i=1}^{n}(n + 1 - i) = \prod_{j=1}^{n}(j) = 1 \times 2 \times \ldots \times n = n!$$

NB. La notation « Pi » est au produit ce qu'est la notation « Sigma » à la somme. « $\prod_{i=1}^{n}(n + 1 - i)$ » signifie que l'on effectue le produit des facteurs depuis celui d'indice $i = 1$ (donc depuis $n + 1 - 1 = n$) jusqu'à celui d'indice $i = n$ (donc jusqu'à $n + 1 - n = 1$). Le changement d'indice $j = n + 1 - i$ permet d'écrire ce produit comme étant celui des entiers depuis l'entier 1 jusqu'à l'entier *n*. Il s'agit de la factorielle de *n*.

2. Analyse d'un algorithme

2.a. Enumérons dans un tableau les différents états du paquet à la fin du mélange :

	$i = 1$		$i = 2$
$j = 1$	*AB*	$j = 1$	*BA*
		$j = 2$	*AB*
$j = 2$	*BA*	$j = 1$	*BA*
		$j = 2$	*AB*

L'algorithme est équiprobable pour un jeu de deux cartes puisqu'il y a le même nombre d'issues *AB* et d'issues *BA*.

2.b. Examinons dans un tableau les différents états du paquet à la fin des mélanges :

	$i = 1$		$i = 2$		$i = 3$
$j = 2$	*BAC*	$j = 1$	*ABC*	$j = 2$	*BAC*
$j = 3$	*CBA*	$j = 1$	*BCA*	$j = 1$	*ACB*

2.c. Sans entrer dans des considérations d'estimation, on peut évidemment conjecturer « a visto de nas » que les états *ACB*, *BAC, BCA* ont une probabilité voisine de 0,18 alors que les trois autres ont une probabilité voisine de 0,15.

Précisons notre conjecture. Compte tenu qu'il y a $3 \times 3 \times 3 = 27$ mélanges différents, les probabilités des états finaux s'expriment en vingt-septièmes.

Nous pouvons conjecturer que les probabilités de *ACB*, *BAC, BCA* sont toutes égales à $\frac{5}{27}$, tandis que les probabilités des trois autres sont toutes égales à $\frac{4}{27}$.

Nous pouvons remarquer que $3 \times \frac{5}{27} + 3 \times \frac{4}{27} = 1$, le compte semble bon !

2.d. Pour chaque valeur de *i* allant de 1 à *n*, l'algorithme peut choisir parmi *n* valeurs différentes, donc le nombre de mélanges possibles est égal à *n* multiplié *n* fois par lui-même.

Ce nombre de mélanges est égal à n^n

2.e. Montrons d'abord que pour tout entier $n \geq 2$, les entiers *n* et $n - 1$ sont des entiers premiers entre eux.

Pour cela, considérons un diviseur commun positif *d* de ces deux nombres.

Si *d* divise à la fois *n* et $n - 1$, alors il divise leur différence $n - (n - 1) = 1$. Puisque *d* est un entier positif qui divise 1, nécessairement $d = 1$. Le seul diviseur commun positif de *n* et $n - 1$ étant 1, ces nombres sont premiers entre eux.

Montrons maintenant que pour tout entier $n > 2$, la factorielle de *n* ne divise pas n^n :

L'entier $n - 1$ étant premier avec *n*, il est premier avec toute puissance de *n*, en particulier il est premier avec la puissance *n*-ième n^n. Lorsque $n > 2$ (inégalité stricte), le nombre $(n - 1)$ est de plus strictement plus grand que 1. Etant strictement plus grand que 1 et premier avec n^n, ne divise pas n^n.

Si $(n - 1)$ ne divise pas n^n, aucun multiple de $(n - 1)$ ne divise non plus n^n. En particulier :

La factorielle de *n*, qui est multiple de $(n - 1)$, n'est pas un diviseur de n^n

Montrons enfin la non équiprobabilité de l'algorithme en jeu.

Considérons l'univers Ω composé des n^n mélanges possibles et muni de l'équiprobabilité.

Dans cet univers, considérons les évènements déterminés par les différents états finaux possibles. Ces évènements sont au nombre de n ! et leurs probabilités s'expriment sous forme de fractions ayant pour dénominateur n^n, le cardinal de Ω.

Si ces évènements étaient équiprobables, chacun serait constitué d'un même nombre de mélanges possibles. Il existerait un nombre entier K tel que la probabilité de chacun d'eux est égale à $\frac{K}{n^n}$. La somme de leurs probabilités serait telle que : $(n!) \times \frac{K}{n^n} = 1$ et l'entier K vérifierait : $n^n = K \times n!$

Nous avons démontré qu'un tel entier n'existait pas, l'hypothèse d'équiprobabilité des états finaux est à rejeter.

Nécessairement, les états finaux ne sont pas équiprobables.

Partie II : Les mélanges américains parfaits

1. Les mélanges extérieurs

1.a. Il faut trois mélanges pour retrouver la configuration initiale comme le prouve l'algorithme « **exterieur** » et son exécution (copie d'écran TI-Nspire CAS ci-contre).

exterieur(6)

$\{a,e,b,f,c,g,d,h\}$
$\{a,c,e,g,b,d,f,h\}$
$\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$
$\{a,e,b,f,c,g,d,h\}$
$\{a,c,e,g,b,d,f,h\}$
$\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$

Terminé

"exterieur" enregistr. effectué

```
Define exterieur(n)=
Prgm
Define j={a,b,c,d,e,f,g,h}
For x,1,n
 j→u
 u[5]→j[2]
 u[2]→j[3]
 u[6]→j[4]
 u[3]→j[5]
 u[7]→j[6]
 u[4]→j[7]
  Disp j
EndFor
EndPrgm
```

1.b. Supposons n pair et posons $n = 2m$. Les cartes dont les numéros appartiennent à l'ensemble $\{0\,;1\,;\ldots;m-1\}$ constituent la première moitié du paquet et les cartes dont les numéros appartiennent à l'ensemble $\{m\,;m+1\,;\ldots;2m-1\}$ constituent la deuxième moitié.

- Si $i \in \{0\,;1\,;\ldots;m-1\}$, alors la carte numéro *i* se trouvera en position $2i$ puisque la carte numéro 0 reste en place et qu'ensuite ces cartes se succèdent de deux en deux. Dans ce cas, 2*i* prend les valeurs de l'ensemble $\{0\,;2\,;\ldots;2m-4, 2m-2\}$.
  Ces valeurs coïncident avec les restes des divisions euclidiennes de 2*i* par $2m-1=n-1$ car tous les nombres de l'ensemble $\{0\,;2\,;\ldots;2m-4,2m-2\}$ sont des entiers positifs strictement inférieurs à $2m-1$.
- Si $i \in \{m\,;m+1\,;\ldots;2m-1\}$, alors la carte numéro *i* se trouvera en position $1+2(i-m)$ soit en position $2i-2m+1$ puisque la carte numéro *m* se trouvera en position 1 et que les autres positions suivent de deux en deux.
  Or, pour $i \in \{m\,;m+1\,;\ldots;2m-1\}$, nous avons l'inégalité :
  $$1 \leq 2i-2m+1 \leq 2(2m-1)-2m+1 = 2m-1$$
  Pour $i \in \{m\,;m+1\,;\ldots;2m-3\}$, le nombre $2i-2m+1$ est un entier positif strictement inférieur à $2m-1$: il coïncide avec le reste de la division euclidienne de 2*i* par $2m-1=n-1$.
  Le cas de $i=2m-1$ fait exception car dans ce cas, $2i-2m+1=2m-1$ alors que le reste de la division euclidienne de 2*i* par $2m-1$ est nul.

Nous pouvons conclure que la nouvelle position $f(i)$ de la carte numéro *i* est presque toujours le reste de la division euclidienne de 2*i* par $2m-1=n-1$, sauf dans le cas où $i=2m-1=n-1$, où la carte reste dans sa même position.

1.c. Pour retrouver la configuration de départ, il faut que le reste de la division de $i \times 2^k$ par $n-1$ soit égal à *i* lui-même. Pour cela, il faut que le reste de la division de 2^k par $n-1$ soit égal à 1.
Le nombre de mélanges extérieurs minimal qu'il faut faire est obtenu lorsque l'entier *k* est le premier exposant pour lequel le reste de la division de 2^k par $n-1$ est égal à 1.

Voici pour information les premiers entiers pairs et les valeurs correspondantes de *k* :
{6,4} ; {8,3} ; {10,6} ; {12,10} ; {14,12} ; {16,4} ; {18,8} ; {20,18}.

Il faut 8 mélanges extérieurs pour qu'un jeu de 52 cartes revienne dans sa configuration de départ car $2^8 = 5 \times 51 + 1$	*retour*() 8 *Terminé* 2^8 256 $51\cdot 5$ 255	"retour" enregistr. effectué Define **retour**()= Prgm $1 \to k$ While mod$(2^k,51)>1$ $k+1 \to k$ EndWhile Disp k EndPrgm

2. Les mélanges intérieurs

Avec les mêmes notations qu'en **1.b**, les cartes dont les numéros appartiennent à l'ensemble $\{0\,;1\,;\dots;m-1\}$ constituent la première moitié du paquet et les cartes dont les numéros appartiennent à l'ensemble $\{m\,;m+1\,;\dots;2m-1\}$ constituent la deuxième moitié.

- Si $i \in \{0\,;1\,;\dots;m-1\}$, alors la carte numéro *i* se trouvera en position $1+2i$ puisque la carte numéro 0 se trouvera en position 1 et ensuite ces cartes se succèdent de deux en deux.

  Dans ce cas : $1 \leq 1+2i \leq 2m = n$. Cet entier est un entier positif strictement inférieur à $n+1$, il s'agit du reste de la division euclidienne de $1+2i$ par $2m+1 = n+1$

- Si $i \in \{m\,;m+1\,;\dots;2m-1\}$, alors la carte numéro *i* se trouvera en position $2i-2m$ puisque la carte numéro *m* se trouvera en position 0 et que les autres positions suivent de deux en deux.

  Or : $1+2i = 2m+1+(2i-2m)$ et $0 = 2m-2m \leq 2i-2m \leq 2(2m-1)-2m = 2m-1$. L'entier $2i-2m$ est un entier positif strictement inférieur à $n+1$, il s'agit du reste de la division euclidienne de $1+2i$ par $2m+1 = n+1$.

.

Nous pouvons conclure que la nouvelle position $g(i)$ de la carte numéro *i* est toujours le reste de la division euclidienne de $1+2i$ par $2m+1 = n+1$ sans aucun cas d'exception.

3. Succession de mélanges extérieurs et intérieurs … avec Python

<table>
<tr><td>Un algorithme « exterieur » et un exemple d'application avec huit cartes.</td><td>

```
>>> def exterieur(u):
        n=len(u)
        v=list(range(len(u)))
        for i in range(n-1):
            v[(2*i)%(n-1)]=u[i]
        return v

>>> exterieur(list(range(8)))
[0, 4, 1, 5, 2, 6, 3, 7]
```

</td></tr>
<tr><td>Retour sur la question II.1.a avec Python. Trois mélanges extérieurs permettent de retrouver la configuration initiale.</td><td>

```
>>> exterieur(list(range(8)))
[0, 4, 1, 5, 2, 6, 3, 7]
>>> exterieur(exterieur(list(range(8))))
[0, 2, 4, 6, 1, 3, 5, 7]
>>> exterieur(exterieur(exterieur(list(range(8)))))
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]
>>>
```

</td></tr>
<tr><td>Un algorithme « interieur » et un exemple d'application avec huit cartes.</td><td>

```
>>> interieur(list(range(8)))
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]
>>> def interieur(u):
        n=len(u)
        v=list(range(len(u)))
        for i in range(n):
            v[(2*i+1)%(n+1)]=u[i]
        return v

>>> interieur(list(range(8)))
[4, 0, 5, 1, 6, 2, 7, 3]
```

</td></tr>
</table>

3.a. Vérification dans le cas de huit cartes qu'une succession « intérieur / extérieur / intérieur » amène la carte numéro 0 sur la position numéro 5.	`>>> interieur(list(range(8)))`
	`[4, 0, 5, 1, 6, 2, 7, 3]`
	`>>> exterieur(interieur(list(range(8))))`
	`[4, 6, 0, 2, 5, 7, 1, 7]`
	`>>> interieur(exterieur(interieur(list(range(8)))))`
	`[5, 4, 7, 6, 1, 0, 7, 2]`
	`>>>`

3.b. $51 = 32 + 16 + 2 + 1 = 2^5 + 2^4 + 2 + 1$

L'écriture en base 2 du nombre 51 est : 110011.

La succession de mélanges nécessaires pour amener la carte numéro 0 en position 51 serait donc la succession :

Intérieur / intérieur / extérieur / extérieur / intérieur / intérieur

Ci-dessous, vérification avec Python que cette succession de mélanges amène bien la carte numéro 0 en position 51. On peut remarquer la symétrie de l'état final obtenu qui commence par les cartes 51, 47, 43 et finit par les cartes 8, 4, 0 « opposées dans le jeu ».

```
>>> jeu=list(range(52))
>>> jeu
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27
, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51]
>>> interieur(interieur(exterieur(exterieur(interieur(interieur(jeu))))))
[51, 47, 43, 39, 15, 37, 33, 29, 5, 1, 23, 19, 48, 44, 40, 9, 38, 34, 30, 26, 2, 24, 20, 16, 45, 41,
10, 6, 35, 31, 27, 49, 25, 21, 17, 13, 42, 11, 7, 3, 32, 28, 50, 46, 22, 18, 14, 36, 51, 8, 4, 0]
>>>
```