OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE D'AIX-MARSEILLE
2021

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

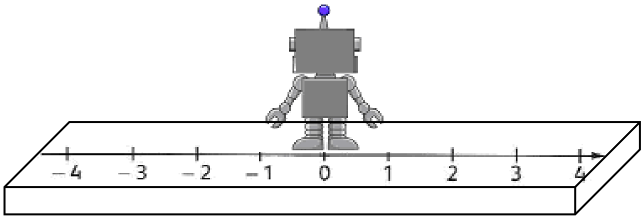
21e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

Marche aléatoire d'un robot

Partie 1 . sur une planche…



Un robot vu de dos est placé au centre d'une planche de 9 mètres de long. Il se situe donc en 0 sur la droite graduée ci-contre. Il saute chaque seconde de 1 mètre à droite D (+1) ou à gauche G (-1) de manière aléatoire.

1) Le robot effectue 3 sauts.

a) Trajets possibles avec position 2points

DDD position 3 DDG Position 1 DGD position 1 DGG Position -1 GGG position -3

GGD Position-1 GDG position-1 GDD Position 1

b) Recopier et compléter le tableau ci-contre.

Position du robot	-3	-1	1	3
Probabilité	1/8	3/8	3/8	1/8

2points

c) Déterminer la distance moyenne entre le robot et son point de départ à la fin des 3 sauts.

M = 0 2points

2) On considère le programme ci-contre.

```
from random import *

def robot1(n)
    P=0
        for i in range(1,n+1) :
            n=randint(0,1)
            if n==0 :
                P=P-1
            else :
                P=P+1
    return P
```

a) La variable P renvoie la position du robot 1 point

b) Le programme a été exécuté pour n=4 et robot1(4) a retourné la valeur 2. Quels ont été les trajets possibles ?

DDDG – DDGD – DGDD –GDDD 2points

3) Le robot effectue n sauts.

a) n doit être pair 1 point

b) n >4 1 point

c) Quelle est la probabilité que le robot tombe pour n=4 ? 0 1 point

pour n=5 ? 2/32 1 point

pour n= 6 ? 2/64 = 1/32 1 point

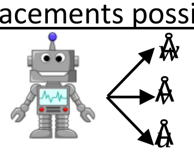
Partie 2 : sur un pont…

Un robot doit emprunter un pont sans garde-corps de 8 mètres de long et trois mètres de large. Le robot est programmé pour avancer chaque seconde de manière aléatoire de la façon suivante :

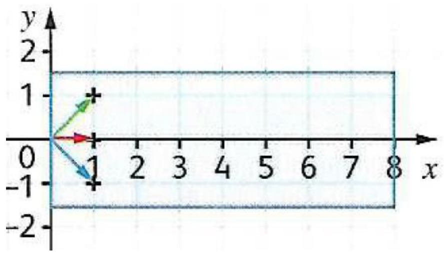
- soit il avance tout droit d'un mètre (selon le vecteur Å) ;

- soit il avance en diagonale vers le bas (selon le vecteur Å) ;

Déplacements possibles :



- soit il avance en diagonale vers le haut (selon le vecteur Å).



Le robot est situé en (0 ; 0) dans le repère orthonormé ci-contre lorsqu'il arrive sur le pont et on note (x ; y) sa position sur le pont après x déplacements. On considère qu'il a traversé le pont pour x=8.

1. Modélisation et simulation

On souhaite estimer la probabilité qu'a le robot de traverser le pont sans tomber à l'eau.

Le programme ci-contre modélise la position du robot sur le pont après x déplacements.

```
from random import *

def robot2()
    x=0
    y=0
    while -1<=y<=1 and x<8 :
        n=randint(-1,1)
        x=x+1
        y=y+n
    return [x , y]
```

a) Parmi les positions suivantes, lesquelles ont pu être obtenues par ce programme ?

(-1 ; 1) (3 ; 2) (9 ; -1) 2points

b) Modifier ce programme pour qu'il retourne « le robot a traversé » ou « le robot est tombé » au lieu de retourner sa position. 2points

2. Etude probabiliste

Pour tout entier naturel n compris entre 0 et 8, on note :

- A_n l'évènement « y=-1 après n déplacements» ;
- B_n l'évènement « y=0 après n déplacements» ;
- C_n l'évènement « y=1 après n déplacements».

On note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n et C_n.

a) Justifier que $a_0=0$, $b_0=1$ et $c_0=0$. Après 0 déplacements, le robot est en position initiale donc y=0

2points

b) Montrer que pour tout entier naturel n compris entre 0 et 7, on a : 2points

Pour être en -1 au rang n+1, il était en 0 au rang n et est «descendu » ou en -1 au rang n et s'est déplacé sans modification sur y donc $a_{n+1} = (a_n + b_n)/3$,

$b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n+c_n}{3}$ car pour être en 0 au rang n+1, il était en 1 au rang n et est descendu, en 0 au rang n et a avancé sans modification de y ou était en -1 et est « remonté et de même $c_{n+1} = \dfrac{b_n+c_n}{3}$

c) $a_1= 1/3$ $b_1 = 1/3$ et $c_1 =1/3$ 2points

d) 7/9. 2points

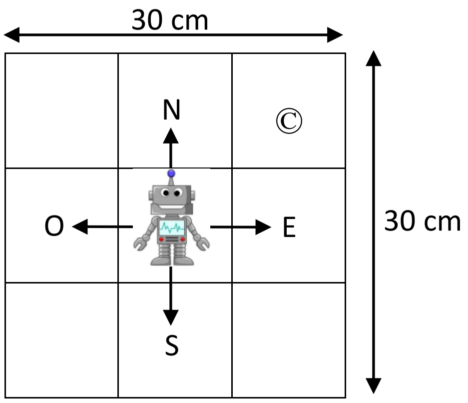
e) La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de a_n, b_n et c_n selon des valeurs de n. Déterminer la probabilité que le robot traverse le pont sans tomber (On rappelle que le robot a traversé le pont lorsque n=8). P = 0,212 2points

n	a_n	b_n	c_n
0	0	1	0
1	0,333 333	0,333 333	0,333 333
2	0,222 222	0,333 333	0,222 222
3	0,185 185	0,259 259	0,185 185
4	0,148 148	0,209 877	0,148 148
5	0,119 342	0,168 724	0,119 342
6	0,096 022	0,135 802	0,096 022
7	0,077 275	0,109 282	0,077 275
8	0,062 186	0,087 944	0,062 186

Partie 3 : sur une table…

Un robot situé au centre d'une table carrée de coté 30 cm se déplace aléatoirement en faisant chaque seconde un saut de 10 cm selon une des quatre directions parallèles aux côtés de la table soit vers le nord N, vers le sud S, vers l'est E, vers l'ouest O.

Par exemples, le trajet EN correspond à un déplacement vers l'est et un vers le nord et le robot se trouve au coin © au nord-est. Le trajet EE correspond à deux déplacements vers l'est et le robot tombe de la table.

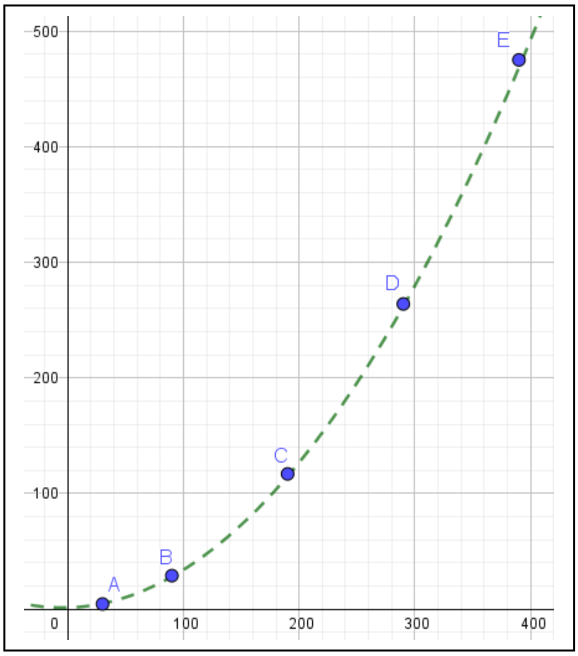


1) Déterminer la probabilité que le robot se trouve au coin ©, au nord-est, après :

a) 2 secondes P = 2/16 b) 3 secondes P = 0 2points + 2points

2) On se demande combien de temps, en moyenne, ce robot va rester sur la table sans tomber. Voici les temps de chute moyens trouvés pour différentes longueurs du côté de table :

	Côté de table (en cm)	Temps de chute moyen (en s)
A	30	4,5
B	90	29
C	190	117
D	290	264
E	390	475



a) Le temps passé par le robot sur la table est-il proportionnel à la longueur du côté de la table ?

Pas de proportionnalité par calcul. 2points

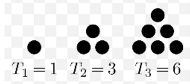
b) En traçant le nuage de points associé à ces valeurs on observe que ces points semblent se positionner sur une parabole. Retrouver une équation de cette parabole puis en déduire : **$y = 0.00295\ x^2 + 0.05458\ x + 0.209375$** 2points

- une estimation du temps de chute moyen du robot pour une table carrée de longueur 5 m. 0,556 s environs 2points

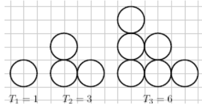
- une estimation de la longueur du côté de la table pour que le robot reste en moyenne 1h sans tomber. Environ 1096 cm 2points

Olympiades mathématiques 2021 Sujet Spé math CORRECTION

Des nombres géométriques : les nombres triangulaires



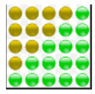
ou encore



Définition : Un nombre triangulaire est un nombre entier que l'on représente généralement à l'aide de points et qui forme la figure géométrique du triangle. Voir figure ci-contre.

PARTIE 1

1. $T_4 = 10 \quad T_5 = 15 \quad T_6 = 21$ 3points
2. Dans un rectangle de dimension n sur (n+1) correspond à 2 T_n. donc $T_n = \frac{n\,(n+1)}{2}$
   Voir schéma. 3points

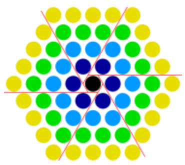


3. Quel que soit n, soit n est pair soit (n+1) est pair. Si n est pair, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ *tel que* $n = 2p$ 4points
   Dans ce cas, $\frac{n}{2} = p$ *donc* $T_n = \frac{n\,(n+1)}{2} = p \times (n+1)$ *donc* T_n *n'est pas premier. Idem si* $(n+1)$ *est pair.*
4. 2021 est-il un nombre triangulaire ? Existe-t-il un n pour lequel $\frac{n\,(n+1)}{2} = 2021?$ *c'est à dire* $n(n+1) = 4042$
   $n^2 + n - 4032 = 0 \quad \Delta = 127{,}15$ *et donc pas de n entier* 4points

PARTIE 2 Quelques propriétés

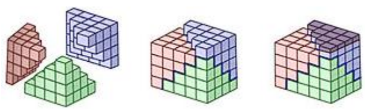
1. $T_n + T_{n+1} = n(n+1) + (n+1)(n+2) = 2(n+1)^2$ *qui est un carré.* 4points
2. Si t est triangulaire, *il existe n tel que* $t = \frac{n\,(n+1)}{2}$. 3points
   $$9t + 1 = 9\,\frac{n\,(n+1)}{2} + 1 = \frac{9}{2}\left(n^2 + n + \frac{2}{9}\right) = \frac{9}{2}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{36}\right) = \frac{(3n+1)(3n+2)}{2} \text{ qui est triangulaire.}$$
   (2n+1)t+t_n est trirangulaire.
3. $T_n{}^2 - T_{n-1}{}^2 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-1)\,n}{2}\right)^2 = n^3$ *après simplification* 3points
4. $T_1{}^2 - T_0{}^2 = 1^3;\ T_2{}^2 - T_1{}^2 = 2^3\ ;\ T_3{}^2 - T_2{}^2 = 3^3\ \ldots.. T_n{}^2 - T_{n-1}{}^2 = n^3$ *d'après la question précédente.* Donc
   $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots. + n^3 = T_1{}^2 - T_0{}^2 + T_2{}^2 - T_1{}^2 + T_3{}^2 - T_2{}^2 + \ldots\ldots. T_{n-1}{}^2 - T_{n-2}{}^2 + T_n{}^2 - T_{n-1}{}^2 = T_n{}^2$ 4points

PARTIE 3 Quelques autres nombres « géométriques »



1. Nombre hexagonaux centrés 4points
   a. En utilisant le découpage suivant $H_n = 6T_{n-1} + 1$
   b. En replaçant T_{n-1} par son expression, on obtient :
   $$H_n = 1 + 6\,\frac{n\,(n-1)}{2}$$

2. Nombres pyramidaux carrés: Un nombre pyramidal carré est un nombre figuré qui peut être représenté par une pyramide à base carrée, dont chaque couche représente un nombre carré.



   a. Volume du pavé : $n^2(n+1) + T_n = n^3 + n^2 + \frac{n(n+1)}{2}$ $=$ *Volume des 3 pyramides.*
   Donc, Volume d'une pyramide =
   $P_n = \frac{1}{3}\left(n^3 + n^2 + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{1}{3}\,n^3 + \frac{3}{6}n^2 + \frac{n}{6}$ ce qui correspond à la somme des carrés de 1 à n. Puisque chaque pyramide est ainsi constituée.
   4points

   b. On vient de calculer la somme des n premiers carrés et on connaît la somme des n premiers entiers (c'est le nombre triangulaire de rang n : $\frac{n\,(n+1)}{2}$).
   La somme des n premiers triangulaires est égale à la somme des $\frac{n\,(n+1)}{2}$ càd la somme des $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$
   Donc la somme des n premiers nombres triangulaires est égale à $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\,n^3 + \frac{3}{6}n^2 + \frac{n}{6} + \frac{n^2+n}{2}\right]$ 4points

Olympiades 2021 Aix-Marseille – Correction-sujet pour les sections technologiques

Écrire les nombres
Depuis quelques siècles maintenant, pour écrire les nombres, nous utilisons l'écriture décimale positionnelle, c'est à dire en utilisant 10 chiffres, 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Mais ça n'a pas toujours été ainsi, et rien ne dit que ça ne changera pas à l'avenir ! Quelques exemples :

1) La numérotation latine.
1a. réponse CDLXXIX
1b. réponse 1344
1c. Réponses : XCIX et IC
1d. réponse CCXXXIX

2) La numérotation shadok.

2a. BU ZO GA MEU : réponse 99
2b. Écrire en numérotation shadok : 21. réponse BU BU BU
2c. Compléter sur votre copie la table d'addition shadok :

+	**GA**	**BU**	**ZO**	**MEU**
GA	GA	BU	ZO	MEU
BU	BU	ZO	MEU	BU GA
ZO	ZO	MEU	BU GA	BU BU
MEU	MEU	BU GA	BU BU	BU ZO

3) L'écriture binaire (en base 2)
.
3a. réponse 23
3b. réponse 10011

4) Faire des calculs en écriture binaire.
4a. Compléter sur votre copie les tables d'addition et de multiplication en binaire :

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	0

x	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

4b. 1011+110= 10001 soit 11+6=17.

4c.: 1011 * 11=100 001.

5) Un algorithme pour écrire en binaire.

5

n	19	9	4	2	1	0
r		1	1	0	0	1
liste		[1]	[1 ;1]	[0 ;1;1]	[0,0,1,1]	[1,0,0,1,1]

6. Et si il y a des virgules ?

6a. réponse 0,11

6b. réponse 0,1001).

6c. écriture périodique

6d.

Réponse :$(0{,}6)_{10} = \frac{1001}{1111} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ Si le candidat simplifie la fraction, la réponse est $\frac{11}{101}$