# Corrigé

# Exercice 1

freemaths.fr

# LES MATHÉMATIQUES

## AU BACCALAURÉAT S

# PROBABILITÉS, BAC S

(probas discrètes et probas à densité)

- Arbre de probabilités
- Probabilités conditionnelles
- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Espérance mathématique
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi normale centrée réduite
- Loi normale
- Intervalle de confiance
- Intervalle de fluctuation asymptotique
- Longueur d'un intervalle

# EXERCICE 1

## [ Polynésie 2019 ]

**1. a. Justifions que $\lambda = 0,1$:**

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X suit une loi exponentielle de paramètre: $\lambda = ?$.
- $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$, pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$.
- $P(X \leqslant a) = \int_0^a f(x)\,dx$.
- $P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,dx$.
- $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 10$ mois.

Dans ces conditions: $\lambda = \frac{1}{E(X)}$ cad: $\lambda = 0,1$.

Au total, nous avons bien: $\lambda = 0,1$.

**1. b. Calculons la probabilité que le distributeur de glaces n'ait connu aucune panne pendant les six premiers mois:**

Ici, il s'agit de calculer: $P(X \geqslant 6) = 1 - P(X \leqslant 6)$.

Or: $P(X \leqslant 6) = \int_0^6 f(x)\,dx$

$$= \int_0^6 \lambda\, e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \left[ - e^{-\lambda x} \right]_0^6$$

$$= 1 - e^{-0,6}$$ cad: $P\,(X \leqslant 6) \approx 0,45$.

D'où: $P\,(X \geqslant 6) \approx 0,55$.

Au total: il y a 55% de chances pour que le distributeur de glaces n'ait connu aucune panne pendant les six premiers mois.

**1. c. Calculons la probabilité que le distributeur de glaces ne connaisse aucune panne jusqu'à la fin de la première année sachant qu'aucune panne a eu lieu pendant les six premiers mois:**

Il s'agit de calculer ici: $P_{(X \geqslant 6)}\,(X \geqslant 12)$.

Or: $P_{(X \geqslant 6)}\,(X \geqslant 12) = P_{(X \geqslant 6)}\,(X \geqslant 6 + 6)$

$= P\,(X \geqslant 6)$, car la loi exponentielle est une loi de durée sans vieillissement.

Ainsi: $P_{(X \geqslant 6)}\,(X \geqslant 12) \approx 0,55$.

Au total, la probabilité demandée est d'environ: 55%.

**1. d. Déterminons la valeur de " t " arrondie à l'entier:**

Il s'agit de déterminer " t " sachant que: $P\,(T > t) = 0,05$.

$P\,(T > t) = 0,05 \iff P\,(T \leqslant t) = 0,95$

$$\iff \int_0^t \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = 0,95$$

$$\iff \left[ - e^{-\lambda x} \right]_0^t = 0,95$$

$<=> \quad 1 - e^{-0,1t} = 0,95,$ car $\lambda = 0,1$

$<=> \quad t = \dfrac{\ln(0,05)}{-0,1}$ cad: $t \approx 29,95$ mois.

Au total: $P(T > t) = 0,05$ quand $t \approx 30$ mois.

**2. a. Calculons la probabilité que la masse d'une glace soit comprise entre 55g et 65g:**

D'après l'énoncé, nous savons que:

- M suit une loi normale d'espérance $\mu = 60g$ et d'écart type $\sigma = 2,5g$.
- Y suit la loi normale centrée réduite.

Ici, nous devons calculer: $P(55 \leqslant M \leqslant 65)$.

Nous remarquons que: $55 = \mu - 2\sigma$ et $65 = \mu + 2\sigma$.

Or, d'après le cours: $P(\mu - 2\sigma \leqslant T \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.

D'où: $P(55 \leqslant M \leqslant 65) \approx 0,954$.

Au total: il y a 95,4% de chance pour que la masse d'une glace soit comprise entre 55g et 65g.

**2. b. Déterminons la plus grande valeur de m, au gramme près, telle que la probabilité $P(M \geqslant m) \geqslant 0,99$:**

Il s'agit de déterminer " m " sachant que: $P(M \geqslant m) \geqslant 0,99$.

$$P(M \geqslant m) \geqslant 0,99 \iff P\left(\frac{M - \mu}{\sigma} \geqslant \frac{m - 60}{2,5}\right) \geqslant 0,99$$

$$\Longleftrightarrow \; P\left(Y \geqslant \frac{m-60}{2,5}\right) \geqslant 0,99$$

$$\Longleftrightarrow \; P\left(Y \leqslant \frac{m-60}{2,5}\right) \leqslant 0,01.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{m-60}{2,5} \approx -2,3263 \;\; \textbf{cad}: \;\; m \approx 54 \text{ grammes.}$$

Au total, la plus grande valeur de m, au gramme près, est: $m = 54$ grammes.

**3. Déterminons la raison mathématique qui pourrait mettre en doute l'hypothèse du distributeur:**

Pour répondre à cette question, nous allons calculer un intervalle de fluctuation asymptotique à 95% et voir si la fréquence observée appartient à cet intervalle.

Ici, nous avons:
- $n = 120$
- $p = \frac{2}{3}$
- $f = \frac{65}{120}$ **cad**: $f = \frac{13}{24}$.

Dans ces conditions:

$n = 120 \geqslant 30$, $n \cdot p = 80 \geqslant 5$ et $n \cdot (1-p) = 40 \geqslant 5$.

Les conditions sont donc réunies.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[ p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \, ; \, p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right],$$

cad: $I = \left[ \frac{2}{3} - 1,96 \times \sqrt{\dfrac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{120}} \,;\, \frac{2}{3} + 1,96 \times \sqrt{\dfrac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{120}} \right]$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [\,0,58\,;\,0,76\,]$.

Or, la fréquence observée " $f$ ", sur l'échantillon, est telle que: $f \approx \frac{13}{24} \notin I$.

Ainsi, **oui** l'hypothèse du distributeur est **fausse**, avec un risque de 5%.