Sujet Spécialité

MATHÉMATIQUES

POLYNÉSIE

BAC S - 2018

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU MERCREDI 20 JUIN 2018

MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Spécialité Coefficient : 9

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1 à 7.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un atome d'hydrogène peut se trouver dans deux états différents, l'état stable et l'état excité. À chaque nanoseconde, l'atome peut changer d'état.

Partie A - Étude d'un premier milieu

Dans cette partie, on se place dans un premier milieu (milieu 1) où, à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est $0,005$, et la probabilité qu'il passe de l'état excité à l'état stable est $0,6$.
On observe un atome d'hydrogène initialement à l'état stable.
On note a_n la probabilité que l'atome soit dans un état stable et b_n la probabilité qu'il se trouve dans un état excité, n nanosecondes après le début de l'observation.
On a donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.
On appelle X_n la matrice ligne $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$.

L'objectif est de savoir dans quel état se trouvera l'atome d'hydrogène à long terme.

1. Calculer a_1 puis b_1 et montrer que $a_2 = 0,993025$ et $b_2 = 0,006975$.
2. Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = X_n A$.
   A est appelée matrice de transition dans le milieu 1.
   On admet alors que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0 A^n$.
3. On définit la matrice P par $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}$.
   On admet que P est inversible et que
   $$P^{-1} = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.
4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. On admet par la suite que, pour tout entier naturel n,
   $$A^n = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 + 0,395^n & 1 - 0,395^n \\ 120(1 - 0,395^n) & 1 + 120 \times 0,395^n \end{pmatrix}.$$
   En déduire une expression de a_n en fonction de n.
6. Déterminer la limite de la suite (a_n). Conclure.

Partie B - Étude d'un second milieu

Dans cette partie, on se place dans un second milieu (milieu 2), dans lequel on ne connaît pas la probabilité que l'atome passe de l'état excité à l'état stable. On note α cette probabilité supposée constante. On sait, en revanche, qu'à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est $0,01$.

1. Donner, en fonction de α, la matrice de transition M dans le milieu 2.
2. Après un temps très long, dans le milieu 2, la proportion d'atomes excités se stabilise autour de 2 %.
   On admet qu'il existe un unique vecteur X, appelé état stationnaire, tel que $XM = X$, et que $X = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,02 \end{pmatrix}$.
   Déterminer la valeur de α.

EXERCICE 4

[Polynésie 2018]

Partie A: Étude d'un premier milieu

1. a. **Calculons a_1 puis b_1:**

Soient: • S_n, l'événement: " l'atome est dans un état stable, n nanosecondes après le début de l'observation ".

• E_n, l'événement: " l'atome est dans un état excité, n nanosecondes après le début de l'observation ".

• Ici, il s'agit de calculer $a_1 = P(S_1)$.

L'événement $S_1 = (S_1 \cap S_0) \cup (S_1 \cap E_0)$.

Ainsi: $P(S_1) = P(S_1 \cap S_0) + P(S_1 \cap E_0)$

$= P_{S_0}(S_1) \times P(S_0) + P_{E_0}(S_1) \times P(E_0)$

$= (1 - 0,005) \times a_0 + 0,6 \times b_0$

$= (1 - 0,005) \times 1 + 0,6 \times 0.$

(car " la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est 0,005, et la probabilité qu'il passe de l'état excité à l'état stable est 0,6 ").

D'où: $a_1 = P(S_1) = 0,995$ cad: $a_1 = 99,5\%$.

• Quant à b_1, $b_1 = 1 - a_1$ cad: $b_1 = 0,005$.

D'où: $b_1 = P(E_1) = 0,5\%$.

1. b. Calculons a_2 puis b_2:

• Ici, il s'agit de calculer $a_2 = P(S_2)$.

L'événement $S_2 = (S_2 \cap S_1) \cup (S_2 \cap E_1)$.

Ainsi: $$P(S_2) = P(S_2 \cap S_1) + P(S_2 \cap E_1)$$
$$= P_{S_1}(S_2) \times P(S_1) + P_{E_1}(S_2) \times P(E_1)$$
$$= (1 - 0,005) \times a_1 + 0,6 \times b_1$$
$$= (1 - 0,005) \times 0,995 + 0,6 \times 0,005.$$

D'où: $a_2 = P(S_2) = 0,993025$.

• Quant à b_2, $b_2 = 1 - a_2$ cad: $b_2 = 0,006975$.

D'où: $b_2 = P(E_2) = 0,006975$.

2. Déterminons la matrice A telle que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = X_n A$:

Nous avons: • $X_n = (a_n \quad b_n)$

• $X_{n+1} = (a_{n+1} \quad b_{n+1})$.

D'où: $X_{n+1} = X_n A$, avec: $A = \begin{pmatrix} 0,995 & 0,005 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$.

En effet: • $a_{n+1} = 0,995\, a_n + 0,6\, b_n$

- $b_{n+1} = 0,6\,a_n + 0,4\,b_n$.

Au total, la matrice de transition dans le milieu 1 est: $A = \begin{pmatrix} 0,995 & 0,005 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$.

3. Déterminons la matrice D définie par $D = P^{-1} A P$:

D est telle que: $D = P^{-1} A P$

$$= \frac{1}{121} \begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,995 & 0,005 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{121} \begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0,395 \\ 1 & 47,4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,395 \end{pmatrix}.$$

Au total, la matrice diagonale D est: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,395 \end{pmatrix}$.

4. Démontrons que pour tout entier naturel n, $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$:

Préalablement notons que: $D = P^{-1} A P \iff P\,D = P\,P^{-1} A P$

$\iff P\,D = I_2\,A\,P$

$\iff P\,D\,P^{-1} = A\,P\,P^{-1}$

$\iff P\,D\,P^{-1} = A\,I_2$

$\iff A = P\,D\,P^{-1}$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$ ".

Initialisation: • $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ (I_2 étant la matrice identité d'ordre 2).

• Et: $P \times D^0 \times P^{-1} = P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times P^{-1}$

$= P \times I_2 \times P^{-1}$

$= P \times P^{-1}$

$= I_2$, car P^{-1} est la matrice inverse de P,

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• D'où: $A^0 = P \times D^0 \times P^{-1}$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $A^n = P\, D^n\, P^{-1}$

et montrons qu'alors: $A^{(n+1)} = P\, D^{(n+1)}\, P^{-1}$.

Supposons: $A^n = P\, D^n\, P^{-1}$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

(1) $\Rightarrow$ $A^n \times A = (P\, D^n\, P^{-1}) \times (P\, D\, P^{-1})$

$\Rightarrow A^n \times A = P\, D^n\, P^{-1} \times P\, D\, P^{-1}$

$\Rightarrow A^n \times A = P\, D^n\, (P^{-1}\, P)\, D\, P^{-1}$

$\Rightarrow A^n \times A = P\, D^n\, (I_2)\, D\, P^{-1}$

$\Rightarrow A^n \times A = P\, D^n\, D\, P^{-1}$

$\Rightarrow A^{(n+1)} = P\, D^{(n+1)} \times P^{-1}$.

Conclusion: pour tout entier naturel n, nous avons: $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

5. Déduisons-en une expression de a_n en fonction de n:

Nous savons que pour tout entier naturel n: $X_n = X_0\,A^n$, avec $X_0 = (1 \quad 0)$.

D'où: $$(a_n \quad b_n) = (1 \quad 0) \times \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 + 0,395^n & \dots \\ 120\,(1 - 0,395^n) & \dots \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{121}\,(120 + 0,395^n \quad \dots).$$

Ainsi, pour tout entier naturel n: $a_n = \dfrac{1}{121}\,(120 + 0,395^n)$.

6. Déterminons la limite de la suite (a_n) et concluons:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{121}\,(120 + 0,395^n)$$

$$= \frac{120}{121} \quad \text{car: } 0,395 \in\,]0\,;1[\text{, et donc: } \lim_{n \to +\infty} (0,395)^n = 0.$$

Au total, la limite de la suite (a_n) est: $\dfrac{120}{121}$.

Cela signifie qu'au bout de n nanosecondes (" n " très grand), la probabilité que l'atome soit stable est de $\dfrac{120}{121}$. (≈ 1).

En d'autres termes, au bout de n nanosecondes (" n " très grand), il est pratiquement certain que l'atome soit dans un état stable.

On dit que: **la suite (a_n) est convergente et converge vers $\dfrac{120}{121}$.**

Partie B: Étude d'un second milieu

1. Donnons, en fonction de a, la matrice de transition M dans le milieu 2:

Soient:
- S_n, l'événement: " l'atome est dans un état stable, n nanosecondes après le début de l'observation ".
- E_n, l'événement: " l'atome est dans un état excité, n nanosecondes après le début de l'observation ".

D'après l'énoncé:
- $P_{E_n}(S_{n+1}) = a$ (**la probabilité que l'atome passe de l'état excité à l'état stable est égale à " a "**).
- $P_{S_n}(E_{n+1}) = 0,01$ (**la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est 0,01**).

Dans ces conditions:
- $P_{E_n}(E_{n+1}) = 1 - a$
- $P_{S_n}(S_{n+1}) = 1 - 0,01 = 0,99$.

D'où, la matrice de transition M dans le milieu 2 est: $M = \begin{pmatrix} 0,99 & 0,01 \\ a & 1-a \end{pmatrix}$.

2. Déterminons la valeur de a:

D'après l'énoncé, l'état stationnaire est tel que: $XM = X$, avec: $X = (98\% \quad 2\%)$.

Dans ces conditions, nous avons:

$$XM = X \iff (0,98 \quad 0,02)\begin{pmatrix} 0,99 & 0,01 \\ a & 1-a \end{pmatrix} = (0,98 \quad 0,02)$$

$$\iff \begin{cases} (0,98 \times 0,99) + (0,02a) = 0,98 \\ (0,98 \times 0,01) + (0,02 - 0,02a) = 0,02 \end{cases}$$

$$\iff a = 49\%.$$

Au total, la valeur de a est de: 49%.

Ainsi, la probabilité pour un atome de passer de l'état excité à l'état stable, à chaque nanoseconde, est de: 49%.