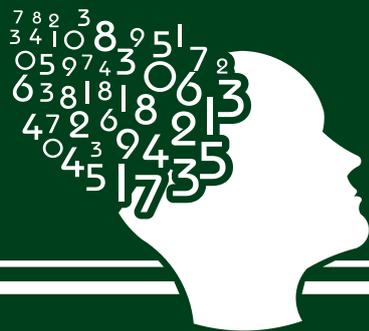


Corrigé

Exercice 4



freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6 dont une annexe en page 6/6 qui est à rendre avec la copie.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

Une personne a mis au point le procédé de cryptage suivant :

- À chaque lettre de l'alphabet, on associe un entier n comme indiqué ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- On choisit deux entiers a et b compris entre 0 et 25.
- Tout nombre entier n compris entre 0 et 25 est codé par le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26.

Le tableau suivant donne les fréquences f en pourcentage des lettres utilisées dans un texte écrit en français.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
f	9,42	1,02	2,64	3,38	15,87	0,94	1,04	0,77	8,41	0,89	0,00	5,33	3,23
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
f	7,14	5,13	2,86	1,06	6,46	7,90	7,26	6,24	2,15	0,00	0,30	0,24	0,32

Partie A

Un texte écrit en français et suffisamment long a été codé selon ce procédé. L'analyse fréquentielle du texte codé a montré qu'il contient 15,9% de O et 9,4 % de E.

On souhaite déterminer les nombres a et b qui ont permis le codage.

1. Quelles lettres ont été codées par les lettres O et E ?
2. Montrer que les entiers a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} 4a + b \equiv 14 \pmod{26} \\ b \equiv 4 \pmod{26}. \end{cases}$$

3. Déterminer tous les couples d'entiers (a, b) ayant pu permettre le codage de ce texte.

Partie B

1. On choisit $a = 22$ et $b = 4$.
 - a) Coder les lettres K et X.
 - b) Ce codage est-il envisageable ?
2. On choisit $a = 9$ et $b = 4$.
 - a) Montrer que pour tous entiers naturels n et m , on a

$$m \equiv 9n + 4 \pmod{26} \iff n \equiv 3m + 14 \pmod{26}$$

- b) Décoder le mot AQ.

EXERCICE 4

[Polynésie 2017]

Partie A:

1. Déterminons les lettres codées par les lettres O et E:

D'après l'analyse fréquentielle du texte codé:

" il contient 15,9% de O et 9,4% de E ".

Or: • la fréquence associée à la lettre E est de 15,87%,

• la fréquence associée à la lettre A est de 9,42%.

Et: • $15,9\% \approx 15,87\%$,

• $9,4\% \approx 9,42\%$.

Ainsi: les lettres codées par O et E sont respectivement E et A.

2. Montrons que les entiers a et b sont bien solutions du système:

Nous savons, grâce à la question précédente que:

• E est codée par O,
(n = 4) (n = 14)

• A est codée par E.
(n = 0) (n = 4)

Ainsi, nous pouvons écrire:

$$\begin{cases} a \times 4 + b \equiv 14 [26] \\ a \times 0 + b \equiv 4 [26] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b \equiv 14 [26] \\ b \equiv 4 [26] \end{cases}$$

Au total, a et b sont bien solutions du système: $\begin{cases} 4a + b \equiv 14 [26] \\ b \equiv 4 [26] \end{cases}$.

3. Résolvons le système:

$$\begin{cases} 4a + b \equiv 14 [26] \\ b \equiv 4 [26] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a \equiv 10 [26] \\ b \equiv 4 [26] \end{cases}$$

- $b = 4$ car: $0 \leq b \leq 25$ et $b \equiv 4 [26]$
- Pour déterminer les valeurs de " a ", nous allons dresser un tableau avec 3 colonnes:

a	$4a$	$4a [26]$
0	0	0
1	4	4
2	8	8
3	12	12
4	16	16
5	20	20
6	24	24
7	28	2
8	32	6
9	36	10
10	40	14
11	44	18
12	48	22

13	52	0
14	56	4
15	60	8
16	64	12
17	68	16
18	72	20
19	76	24
20	80	2
21	84	6
22	88	10
23	92	14
24	96	18
25	100	22

Pour deux valeurs de "a": $a=9$ et $a=22$, l'équation $4a \equiv 10 [26]$ est vérifiée.

Au total, deux couples sont solutions du système: $(9; 4)$ et $(22; 4)$.

Partie B:

1. a. Codons les lettres K et X:

Ici: $an + b = 22n + 4$, car on choisit $a = 22$ et $b = 4$.

1. a. a1. En ce qui concerne K:

La lettre K a pour entier associé: $n = 10$.

D'où: $22n + 4 = 22 \times 10 + 4 \Leftrightarrow 22n + 4 = 224$

$\Leftrightarrow 22n + 4 = 8 \times 26 + 16$.

Dans ces conditions: $22n + 4 \equiv 16 [26]$.

Ainsi: la lettre K est codée par la lettre Q ($n = 16$).

1. a. a2. En ce qui concerne X:

La lettre X a pour entier associé: $n = 23$.

D'où: $22n + 4 = 22 \times 23 + 4 \Leftrightarrow 22n + 4 = 510$

$$\Leftrightarrow 22n + 4 = 19 \times 26 + 16.$$

Dans ces conditions: $22n + 4 \equiv 16 [26]$.

Ainsi: la lettre X est codée par la lettre Q ($n = 16$).

1. b. Ce codage est-il envisageable ?

Non, il n'est pas envisageable car K et X, deux lettres différentes, sont codées par la même lettre Q.

2. a. Montrons que pour tous les entiers naturels " n " et " m ", l'équivalence est bien vérifiée:

• Montrons: $m \equiv 9n + 4 [26] \Rightarrow n \equiv 3m + 14 [26]$.

$$m \equiv 9n + 4 [26] \Rightarrow 3m \equiv 27n + 12 [26]$$

$$\Rightarrow 3m + 14 \equiv 27n + 26 [26]$$

$$\Rightarrow 3m + 14 \equiv 26n + n + 26 [26]$$

$$\Rightarrow 3m + 14 \equiv 26(n + 1) + n [26]$$

$$\Rightarrow 3m + 14 \equiv n [26]$$

$$\Rightarrow n \equiv 3m + 14 [26].$$

• Montrons: $n \equiv 3m + 14 [26] \Rightarrow m \equiv 9n + 4 [26]$.

$$n \equiv 3m + 14 [26] \Rightarrow 9n \equiv 27m + 126 [26]$$

$$\Rightarrow 9n + 4 \equiv 27m + 130 [26]$$

$$\Rightarrow 9n + 4 \equiv 26m + m + 130 [26]$$

$$\Rightarrow 9n + 4 \equiv 26m + m + (5 \times 26) [26]$$

$$\Rightarrow 9n + 4 \equiv 26(m + 5) + m [26]$$

$$\Rightarrow 9n + 4 \equiv m [26]$$

$$\Rightarrow m \equiv 9n + 4 [26].$$

Au total: $m \equiv 9n + 4 [26] \Leftrightarrow n \equiv 3m + 14 [26]$.

2. b. Décodons le mot AQ:

Le décodage du mot AQ est: OK.

(en ayant recours à la question précédente)