Corrigé

Exercice 2

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

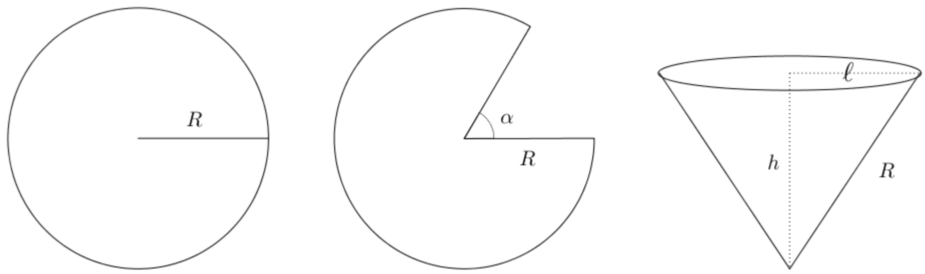
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6 dont une annexe en page 6/6 qui est à rendre avec la copie.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats



Dans un disque en carton de rayon R , on découpe un secteur angulaire correspondant à un angle de mesure α radians. On superpose les bords afin de créer un cône de révolution. On souhaite choisir l'angle α pour obtenir un cône de volume maximal.

On appelle ℓ le rayon de la base circulaire de ce cône et h sa hauteur.

On rappelle que :

- le volume d'un cône de révolution de base un disque d'aire $\mathscr{A}$ et de hauteur h est $\frac{1}{3}\mathscr{A}h$.
- la longueur d'un arc de cercle de rayon r et d'angle θ, exprimé en radians, est $r\theta$.

1. On choisit $R = 20$ cm.

a) Montrer que le volume du cône, en fonction de sa hauteur h, est $V(h) = \frac{1}{3}\pi(400 - h^2)h$.

b) Justifier qu'il existe une valeur de h qui rend le volume du cône maximum. Donner cette valeur.

c) Comment découper le disque en carton pour avoir un volume maximum ? Donner un arrondi de α au degré près.

2. L'angle α dépend-il du rayon R du disque en carton ?

EXERCICE 2

[Polynésie 2017]

1. a. Montrons que $V(h) = \frac{1}{3} \pi (400 - h^2) h$:

D'après l'énoncé: $V(h) = \frac{1}{3} \mathcal{A} h$.

Ici, nous ne connaissons pas $\mathcal{A}$.

Or: $\mathcal{A} = \pi \times (\text{rayon})^2$.

Et, d'après Pythagore: $(\text{rayon})^2 = \rho^2 = R^2 - h^2 \Rightarrow \rho^2 = 400 - h^2$.

Dans ces conditions: $\mathcal{A} = \pi (400 - h^2)$.

Au total, le volume du cône est: $V(h) = \frac{1}{3} (\mathcal{A}) h$

$\Rightarrow V(h) = \frac{1}{3} \pi (400 - h^2) h$.

1. b. Justifions qu'il existe une valeur de h telle que V (h) soit maximum:

- Ici:
  - $V(h) = \frac{1}{3} \pi (400 - h^2) h \iff V(h) = \frac{400}{3} \pi h - \frac{1}{3} \pi h^3$
  - $D_V = [0 ; 20]$, car $V(h) \geq 0$.

V est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle [0 ; 20].

Ainsi, nous pouvons calculer V' pour tout $h \in [0 ; 20]$.

Pour tout $h \in [0 ; 20]$: $V'(h) = \frac{400}{3} \pi - \pi h^2$.

• Soit h^*, la valeur de h telle que $V(h)$ soit maximum.

h^* est tel que $V'(h) = 0$.

$V'(h) = 0 \iff \frac{400}{3}\pi - \pi h^2 = 0 \Rightarrow h^* = \frac{20}{\sqrt{3}}$, car $h^* > 0$.

Ainsi: il existe bien une valeur de h $\left(h^* = \frac{20}{\sqrt{3}}\right)$ telle que $V(h)$ soit maximum.

Dans ces conditions, le volume maximum du cône est:

$$V_{max} = \frac{1}{3}\pi\left(400 - \frac{400}{3}\right)\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right) \iff V_{max} = \frac{16\,000\,\pi}{9\sqrt{3}} \approx 3\,224 \text{ cm}^3.$$

1. c. Comment découper le disque pour avoir un volume maximum ?

• Lorsque le volume du cône est maximum: $\rho^2 = 400 - h^{*2}$

$$\iff \rho = \sqrt{400 - \left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \rho^* = \sqrt{\frac{800}{3}}.$$

• Or le périmètre du disque de base est: $2\pi\rho$.

Dans ces conditions, ici le périmètre du disque de base est: $2\pi\sqrt{\frac{800}{3}}$.

• De plus, la longueur d'un arc de cercle de rayon R et d'angle θ est: $R \times \theta$.

Ici, la longueur de l'arc de cercle est donc: $R \times (2\pi - \alpha)$, car $\theta = 2\pi - \alpha$.

• D'où, en égalisant, nous avons: $2\pi\sqrt{\frac{800}{3}} = R \times (2\pi - \alpha)$ **(I)**

$$\iff 2\pi\sqrt{\frac{800}{3}} = 20 \times (2\pi - \alpha)$$

$$\iff 2\pi \times 20\sqrt{\frac{2}{3}} = 40\pi - 20\alpha$$

$$\iff 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} = 2\pi - \alpha$$

$$\implies \alpha = 2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \quad \text{(en radians)}.$$

Au total, α doit être tel que:
- $\alpha = 2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ (en radians),
- $\widehat{\alpha} = \alpha \times \frac{180}{\pi} \implies \widehat{\alpha} \approx 66°$ (arrondi au degré près).

2. L'angle α dépend-il du rayon R ?

Nous savons que: • $V(h) = \frac{\pi}{3}(R^2 - h^2)\,h$, car $\rho^2 = R^2 - h^2$.

Dans ces conditions: $V'(h) = \frac{R^2}{3}\pi - \pi h^2$.

- Soit h^*, la valeur de h telle que $V(h)$ soit maximum.

h^* est tel que $V'(h) = 0$.

$$V'(h) = 0 \iff \frac{R^2}{3}\pi - \pi h^2 = 0 \implies h^* = \frac{R}{\sqrt{3}}, \text{ car } h^* > 0.$$

- Ainsi: $\rho^{*2} = R^2 - h^{*2} \implies \rho^* = R \times \sqrt{\frac{2}{3}}$.
- Par conséquent: $(I) \iff 2\pi\left(R \times \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = R \times (2\pi - \alpha)$

$$\iff 2\pi \times \sqrt{\frac{2}{3}} = 2\pi - \alpha.$$

Au total: le calcul de α ne dépend donc pas du rayon R.