EXERCICE 4

[Polynésie 2016]

1. **Proposition 1**: " Pour tout entier naturel n, le chiffre des unités de $n^2 + n$ n'est jamais égal à 4 ".

C'est vrai.

Justifions le.

Le dernier chiffre de n peut prendre comme valeurs:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

Ainsi, nous pouvons dresser le tableau suivant:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 + n$	0	2	6	12	20	30	42	56	72	90

Au total: le chiffre des unités de $n^2 + n$ n'est jamais égal à 4.

2. **Proposition 2**: " La suite (U_n) est convergente ".

C'est vrai.

Justifions le.

Nous allons appliquer le théorème des gendarmes selon lequel:

Si, à partir d'un certain rang, on a: $V_n \leqslant U_n \leqslant W_n$, et si les suites (V_n) et (W_n) convergent vers L, alors la suite (U_n) converge vers L.

Ici: $U_n = \frac{1}{n}$ pgcd $(20\,;\,n)$, pour tout $n \geqslant 1$.

Soient: • (V_n) la suite définie, pour $n \geqslant 1$, par: $V_n = \frac{1}{n}$,

• (W_n) la suite définie, pour $n \geqslant 1$, par: $W_n = \frac{20}{n}$.

En effet: • la plus petite valeur que peut prendre pgcd $(20\,;n) = 1$,

• la plus grande valeur que peut prendre pgcd $(20\,;n) = 20$.

Or: $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 0$.

Donc d'après le théorème des gendarmes: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

Au total: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ et donc (U_n) est convergente.

3. Proposition 3: **" Pour toutes matrices A et B carrées de dimension 2, on a: $A \times B = B \times A$ ".**

C'est faux.

Justifions le.

D'après le cours, la multiplication entre deux matrices n'est pas commutative:

$$A \times B \neq B \times A.$$

Par exemple: • $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

• $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Au total: $A \times B \neq B \times A$.

4. a. Proposition 4: " $P_{A_n}(B_{n+1}) = 0,45$ ".

C'est vrai.

Justifions le.

D'après la matrice de transition, nous pouvons écrire:

$a_{n+1} = 0,55 \times a_n + 0,3 \times b_n$ et $b_{n+1} = 0,45 \times a_n + 0,7 \times b_n$ (1).

Or: $b_{n+1} = P(B_{n+1}) = P_{A_n}(B_{n+1}) \times a_n + P_{B_n}(B_{n+1}) \times b_n$ (2).

En identifiant (1) et (2), nous pouvons dire que:

$$P_{A_n}(B_{n+1}) = 0,45.$$

Au total: $P_{A_n}(B_{n+1}) = 0,45$.

4. b. Proposition 5: " Il existe un état initial X_0 tel que: $b_1 = 3a_1$ ".

C'est faux.

Justifions le.

D'après la matrice de transition, nous pouvons écrire:

$a_1 = 0,55 \times a_0 + 0,3 \times b_0$ et $b_1 = 0,45 \times a_0 + 0,7 \times b_0$.

Dans ces conditions: $b_1 = 3a_1 \iff 0,45 \times a_0 + 0,7 \times b_0 = 1,65 \times a_0 + 0,9 \times b_0$

$$\Rightarrow b_0 = -6 \times a_0 < 0.$$

C'est impossible car: b_0 doit être positif.

Au total: il n'existe pas d'état initial X_0 avec $b_1 = 3a_1$.