EXERCICE 3

[Polynésie 2016]

Partie A: Etoile filante

1. Vérifions que $P(T \leqslant 3) \approx 0,451$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$.

Dans ces conditions:

- $f(t) = 0,2\, e^{-0,2t}$, $\forall\, t \in [0, +\infty[$.
- $P(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a f(t)\, dt$.
- $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Il s'agit de calculer: $P(T \leqslant 3)$.

$$P(T \leqslant 3) = \int_0^3 0,2\, e^{-0,2t}\, dt$$

$$= 0,2 \left[-\frac{1}{0,2}\, e^{-0,2t} \right]_0^3$$

$$= \left[-e^{-0,2t} \right]_0^3$$

$$\Rightarrow\ P(T \leqslant 3) = 1 - e^{-0,6} \ \Rightarrow\ P(T \leqslant 3) \approx 0,451.$$

Au total, la probabilité que le groupe attende moins de 3 minutes pour voir l'étoile filante suivante est d'environ: 45,1%.

2. Déterminons " a " tel que $P(T \leqslant a) > 0,95$:

$$P(T \leqslant a) > 0,95 \iff \int_0^a 0,2\, e^{-0,2t}\, dt > 0,95$$

$$\iff [-e^{-0,2t}]_0^a > 0,95$$

$$\iff 1 - e^{-0,2 \times a} > 0,95$$

$$\iff e^{-0,2 \times a} < 5\%$$

$$\iff -0,2 \times a < \ln(5\%)$$

$$\implies a > \frac{\ln(5\%)}{-0,2} \implies a > 14,98.$$

Au total, la durée minimale, arrondie à la minute près, est de: 15 mn.

3. Estimons le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie nocturne:

Cela revient à calculer $E(T)$.

$$E(T) = \int_0^{+\infty} t \,.\, f(t)\, dt$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \int_0^b t \times (\lambda\, e^{-\lambda t})\, dt$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$, d'après le cours.

Comme $\lambda = 0,2$, $E(T) = 5$ minutes.

En moyenne, le groupe observe une étoile filante toutes les 5 minutes.
Donc en 2 heures, il observera 24 étoiles filantes ($2\ h = 24 \times 5\ mn$).

Au total, le nombre moyen d'étoiles filantes est de: 24.

EXERCICE 3

[Polynésie 2016]

Partie B: Adhérents et téléscope

1. Montrons que la probabilité que cet adhérent, choisit au hasard, possède un téléscope personnel est de 0. 494:

D'après l'énoncé, nous avons:

- A = " la personne interrogée est un nouvel adhérent ".
- B = " la personne interrogée possède un téléscope ".

- $P(A) = 64\%$
- $P(\bar{A}) = 36\%$

$(64\% + 36\% = 1)$.

- $P_A(B) = 35\%$
- $P_A(\bar{B}) = 65\%$

$(35\% + 65\% = 1)$.

- $P(\bar{A} \cap B) = 27\%$.

Nous devons ainsi calculer: $P(B)$.

Or, l'événement $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$.

D'où : $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$

$$= P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A}).$$

Ainsi : $P(B) = 35\% \times 64\% + \left[\dfrac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})}\right] \times 36\%$

$$\Rightarrow \; P(B) = 0.494.$$

Au total, il y a 49. 4% de chance pour que l'adhérent, choisit au hasard, possède un téléscope personnel.

2. Déterminons la probabilité que ce soit un nouvel adhérent:

Cela revient à calculer: $P_B(A)$.

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} \iff P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}.$$

Ainsi: $P_B(A) = \dfrac{35\% \times 64\%}{49.4\%} \Rightarrow P_B(A) \approx 45.34\%.$

Au total, il y a 45. 34% de chance pour que ce soit un nouvel adhérent.

Partie C: L'avis de l'astronome

Le résultat du sondage amène-t-il le responsable à changer d'avis ?

Ici, nous avons: • $n = 100$

• $p = 50\%$ (par hypothèse)

• $f = \dfrac{54}{100} \Rightarrow f = 54\%.$

Dans ces conditions:

$n = 100 \geq 30$, $n \cdot p = 50 \geq 5$ et $n \cdot (1 - p) = 50 \geq 5$.

Les conditions sont donc réunies.

On choisit un échantillon aléatoire de 100 personnes parmi les 2 500 habitants.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = [\, p - 1.96 \times \left(\frac{p(1-p)}{n}\right)^{1/2} ; p + 1.96 \times \left(\frac{p(1-p)}{n}\right)^{1/2} \,],$$

cad: $I = [\, 0.5 - 1.96 \times 0.05 ; 0.5 + 1.96 \times 0.05 \,]$.

À l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [\, 0.402 ; 0.598 \,]$.

Or la fréquence d'habitants favorables " f ", sur l'échantillon, est telle que:

$$f = 54\% \in I.$$

Ainsi, l'astronome ne changera pas d'avis.