

EXERCICE 2

[Polynésie 2016]

1. Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites U et V ?

Les formules sont:

• En C2: on entre $\ll = B_2 + 2 * A_2 * A_2 + 3 * A_2 + 5 \gg$

ou: $\ll = B_2 + 2 * A_2 \wedge 2 + 3 * A_2 + 5 \gg$.

• En B3: on entre $\ll = 2 * B_2 + 2 * A_2 * A_2 - A_2 \gg$

ou: $\ll = 2 * B_2 + 2 * A_2 \wedge 2 - A_2 \gg$.

2. Déterminons, en justifiant, une expression de V_n et de U_n en fonction uniquement de n:

Prenons: $V_n = U_n + 2n^2 + 3n + 5$ (1).

Des calculs faits au brouillon, à partir de l'expression (1), permettent d'affirmer que, a priori, la suite (V_n) est géométrique et s'écrit: $V_n = 7 \times 2^n$.

Ainsi, nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $V_n = 7 \times 2^n$ ".

Initialisation: • $V_0 = U_0 + 2(0)^2 + 3 \times 0 + 5$
 $= 2 + 2(0)^2 + 3 \times 0 + 5$ (car $U_0 = 2$)
 $\Rightarrow V_0 = 7$.

Donc nous avons bien: $V_0 = 7 \times 2^0$.

• $V_1 = U_1 + 2(1)^2 + 3 \times 1 + 5$

$$= 4 + 2(1)^2 + 3 \times 1 + 5 \quad (\text{car } U_1 = 4)$$

$$\Rightarrow V_1 = 14.$$

Donc nous avons bien: $V_1 = 7 \times 2^1$.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $V_n = 7 \times 2^n$
et montrons qu'alors: $V_{n+1} = 7 \times 2^{(n+1)}$.

Supposons: $V_n = 7 \times 2^n$, pour un entier naturel n fixé.

(2)

$$(2) \Rightarrow V_n - (2n^2 + 3n + 5) = 7 \times 2^n - (2n^2 + 3n + 5)$$

$$\Rightarrow U_n = 7 \times 2^n - (2n^2 + 3n + 5)$$

$$\Rightarrow 2U_n = 2 \times 7 \times 2^n - 2(2n^2 + 3n + 5)$$

$$\Rightarrow 2U_n + 2n^2 - n = 7 \times 2^{(n+1)} - 4n^2 - 6n - 10 + 2n^2 - n$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = 7 \times 2^{(n+1)} - 2n^2 - 7n - 10$$

$$\Rightarrow U_{n+1} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) + 5 = 7 \times 2^{(n+1)}$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = 7 \times 2^{(n+1)}.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n , nous avons: $V_n = 7 \times 2^n$.

En conclusion, les expressions de V_n et de U_n en fonction uniquement de n sont:

- $V_n = 7 \times 2^n$.

- $U_n = 7 \times 2^n - (2n^2 + 3n + 5)$.