Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 2 (3 points)

Commun à tous les candidats

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$$

On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$$

1. Voici un extrait de feuille de tableur.

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

EXERCICE 2

[Polynésie 2016]

1. Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites U et V ?

Les formules sont:

• En C2: on entre << $= B_2 + 2 * A_2 * A_2 + 3 * A_2 + 5$ >>

ou: << $= B_2 + 2 * A_2 \wedge 2 + 3 * A_2 + 5$ >>.

• En B3: on entre << $= 2 * B_2 + 2 * A_2 * A_2 - A_2$ >>

ou: << $= 2 * B_2 + 2 * A_2 \wedge 2 - A_2$ >>.

2. Déterminons, en justifiant, une expression de V_n et de U_n en fonction uniquement de n:

Prenons: $V_n = U_n + 2n^2 + 3n + 5$ (1).

Des calculs faits au brouillon, à partir de l'expression (1), permettent d'affirmer que, a priori, la suite (V_n) est géométrique et s'écrit: $V_n = 7 \times 2^n$.

Ainsi, nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $V_n = 7 \times 2^n$ ".

Initialisation: • $V_0 = U_0 + 2(0)^2 + 3 \times 0 + 5$

$= 2 + 2(0)^2 + 3 \times 0 + 5$ (car $U_0 = 2$)

$\Rightarrow V_0 = 7$.

Donc nous avons bien: $V_0 = 7 \times 2^0$.

• $V_1 = U_1 + 2(1)^2 + 3 \times 1 + 5$

$= 4 + 2(1)^2 + 3 \times 1 + 5$ (car $U_1 = 4$)

$\Rightarrow V_1 = 14.$

Donc nous avons bien: $V_1 = 7 \times 2^1.$

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $V_n = 7 \times 2^n$
et montrons qu'alors: $V_{n+1} = 7 \times 2^{(n+1)}.$

Supposons: $V_n = 7 \times 2^n$, pour un entier naturel n fixé.
(2)

$$(2) \Rightarrow V_n - (2n^2 + 3n + 5) = 7 \times 2^n - (2n^2 + 3n + 5)$$

$$\Rightarrow U_n = 7 \times 2^n - (2n^2 + 3n + 5)$$

$$\Rightarrow 2U_n = 2 \times 7 \times 2^n - 2(2n^2 + 3n + 5)$$

$$\Rightarrow 2U_n + 2n^2 - n = 7 \times 2^{(n+1)} - 4n^2 - 6n - 10 + 2n^2 - n$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = 7 \times 2^{(n+1)} - 2n^2 - 7n - 10$$

$$\Rightarrow U_{n+1} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) + 5 = 7 \times 2^{(n+1)}$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = 7 \times 2^{(n+1)}.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous avons: $V_n = 7 \times 2^n.$

En conclusion, les expressions de V_n et de U_n en fonction uniquement de n sont:

- $V_n = 7 \times 2^n.$
- $U_n = 7 \times 2^n - (2n^2 + 3n + 5).$