

# EXERCICE 1

[ Polynésie 2016 ]

## Partie A: Étude de fonction

1. Déterminons à quel instant la vitesse est maximale:

D'après l'énoncé, à un instant  $t \geq 0$ , la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est  $C'(t)$ .

Or,  $C'(t)$  correspond à la pente de la tangente aux courbes  $C_1$  et  $C_2$ , en un point donné d'abscisse  $t$ .

Graphiquement, cette dernière est maximale quand:

- $t = 0$ , pour  $C_1$ ,
- $t = 0$ , pour  $C_2$ .

En définitive, dans les 2 cas, la vitesse est maximale quand:  $t = 0$ .

2. Déterminons la courbe correspondante à la personne la plus corpulente:

Une personne de forte corpulence subit moins vite les effets de l'alcool, donc:

la courbe  $C_2$  correspond à la personne la plus corpulente.

3. a. Déterminons  $f'(0)$ :

Ici: •  $f(t) = Ate^{-t}$

•  $Df = [0; +\infty[$ .

Posons:  $f = f_1 \times f_2$ , avec:  $f_1(t) = A.t$  et  $f_2(t) = e^{-t}$ .

$f_1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction polynôme, donc dérivable sur  $[0; +\infty[$ .

$f_2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction "exponentielle", donc dérivable sur  $[0; +\infty[$ .

Par conséquent,  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  comme produit de 2 fonctions dérivables sur  $[0; +\infty[$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $f'$  pour tout  $t \in [0; +\infty[$ .

Pour tout  $t \in [0; +\infty[$ :  $f'(t) = (A \times e^{-t}) + (A \times t \times (-e^{-t}))$

$$\Rightarrow f'(t) = A e^{-t} (1 - t).$$

Dans ces conditions:  $f'(0) = A$ .

**Au total:**  $f'(0) = A$ .

### 3. b. L'affirmation est-elle vraie ?

**FAUX:** d'après la question 2.

## Partie B: Un cas particulier

### 1. Étudions les variations de $f$ sur $[0; +\infty[$ :

Ici: •  $A = 2$ , car:  $f(t) = 2te^{-t}$

•  $f'(t) = 2e^{-t}(1 - t)$ .

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout  $t$  de  $[0; +\infty[$ .

1<sup>er</sup> cas:  $f'(t) = 0$ .

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2e^{-t}(1-t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1-t = 0, \text{ car } 2e^{-t} > 0$$

$$\Rightarrow t = 1.$$

2<sup>eme</sup> cas:  $f'(t) < 0$ .

$$f'(t) < 0 \Leftrightarrow 2e^{-t}(1-t) < 0$$

$$\Leftrightarrow 1-t < 0, \text{ car } 2e^{-t} > 0$$

$$\Rightarrow t > 1 \text{ ou } t \in ]1; +\infty[.$$

3<sup>eme</sup> cas:  $f'(t) > 0$ .

$$f'(t) > 0 \Leftrightarrow 2e^{-t}(1-t) > 0$$

$$\Leftrightarrow 1-t > 0, \text{ car } 2e^{-t} > 0$$

$$\Rightarrow t < 1 \text{ ou } t \in [0; 1[.$$

Au total: •  $f$  est décroissante sur  $]1; +\infty[$ ,

(car sur  $]1; +\infty[$ ,  $f'(t) \leq 0$ )

•  $f$  est croissante sur  $[0; 1]$ .

(car sur  $[0; 1]$ ,  $f'(t) \geq 0$ )

Nous pouvons dresser alors le tableau de variation suivant:

$t$	0	1	$+\infty$
$f'$	+	0	-
$f$			

Avec: •  $a = f(0) \Rightarrow a = 0,$

•  $b = f(1) \Rightarrow b = 2e^{-1},$

•  $c = f(+\infty) \Rightarrow c = 0.$

(  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = 0,$  d'après le cours)

## 2. Déterminons l'instant où la concentration d'alcool dans le sang est maximale:

D'après le tableau de variation, la concentration d'alcool dans le sang est maximale quand:  $t = 1.$

- En conclusion:
- la concentration est maximale quand  $t = 1,$
  - elle est alors égale à  $f(1) = \frac{2}{e}$  g/L,
  - la concentration maximale, à  $10^{-2}$  près, est alors égale à  $f(1) \approx 0,74$  g/L.

## 3. Rappelons la limite de $\frac{e^t}{t}$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$ , et déduisons-en celle de $f(t)$ en $+\infty$ :

D'après le cours:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty,$  d'après le théorème des croissances comparées.

Dans ces conditions:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0.$

Et donc:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 2te^{-t}$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} 2 \left( \frac{t}{e^t} \right)$$

$$= 2 \times 0$$

$$= 0.$$

Cela signifie que: quand  $t$  est très grand, cad au bout d'un certain temps, il n'y aura plus aucune trace d'alcool dans le sang.

4. a. Montrons qu'il existe 2 réels  $t_1$  et  $t_2$  avec  $f(t_1) = f(t_2) = 0$ :

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

• Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ .

Pour tout réel " $K$ " compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel " $c$ " de  $[a; b]$  tel que:  $f(c) = K$ .

Cela signifie que: l'équation  $f(x) = K$  admet au moins une solution appartenant à  $[a; b]$ .

• Si de plus, la fonction  $f$  est strictement "croissante" ou "décroissante" sur  $[a; b]$ , l'équation  $f(x) = K$  admet une **unique** solution appartenant à  $[a; b]$ .

Ici: •  $f$  est continue sur  $[0; 1[$  et est strictement croissante sur  $[0; 1[$ .

•  $f$  est continue sur  $]1; +\infty[$  et est strictement décroissante sur  $]1; +\infty[$ .

De plus: • sur  $[0; 1[$ , " $K = 0, 2$ " est compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .

En effet:  $0 \leq 0, 2 \leq 2e^{-1}$ .

• sur  $]1; +\infty[$ , " $K = 0, 2$ " est compris entre  $f(c)$  et  $f(b)$ .

En effet:  $0 \leq 0, 2 \leq 2e^{-1}$ .

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation  $f(t) = 0, 2$  ( $K = 0, 2$ ) admet une solution unique appartenant

à  $[0;1[$  et une solution unique appartenant à  $]1;+\infty[$ .

Au total: il existe bien 2 nombres  $t_1$  ( $t_1 \in [0;1[$ ) et  $t_2$  ( $t_2 \in ]1;+\infty[$ ) qui sont tels que:

$$f(t_1) = f(t_2) = 0,2$$

#### 4. b. Déterminons la durée minimale avant de pouvoir prendre le volant:

Pour répondre à cette question, nous avons le choix entre  $t_1$  et  $t_2$ .

Nous retiendrons  $t_2$  car entre  $t_1$  et  $t_2$ , le taux d'alcoolémie est en phase croissante puis décroissante mais dépasse toujours **"0,2"**.

À l'aide d'une machine à calculer et par tâtonnement, on trouve:

$$t_2 \approx 3,578 \text{ heures.}$$

Au total, la durée minimale que Paul doit attendre avant de pouvoir prendre le volant est de: 3,578 heures cad: 3 heures et 35 minutes.

#### 5. a. Justifions qu'il existe un instant T:

Ici, il s'agit de déterminer **"T"** tel que:  $f(T) = 5 \times 10^{-3}$ .

Or:  $5 \times 10^{-3} \in ]1;+\infty[*$ .

\* car: c'est dans l'intervalle  $]1;+\infty[$  que le taux d'alcoolémie diminue.

Or sur  $]1;+\infty[$ :

- $f$  est continue

- $f$  est strictement décroissante

- **" $K = 5 \cdot 10^{-3}$ "** est compris entre  $f(c)$  et  $f(b)$ ,

car:  $0 \leq 5 \cdot 10^{-3} \leq 2e^{-1}$ .

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, **oui**, il existe un instant " T " à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

**5. b. Recopions et complétons le tableau en exécutant l'algorithme:**

Le tableau complété est le suivant:

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
<i>p</i>	0,25	0,25	0,25
<i>t</i>	3,5	3,75	4
<i>C</i>	0,21	0,18	0,15

**Notons que:** la valeur affichée par l'algorithme correspond au temps nécessaire, en heure, pour que l'alcool ne soit plus détectable dans le sang.