EXERCICE 4

[Polynésie 2016]

1. **Proposition 1**: " Les points A, B et C ne sont pas alignés ".

C'est vrai.

Justifions le.

D'après l'énoncé: $z_A = \sqrt{2} + 3i$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = -4i$.

D'après le cours, les points A, B et C sont alignés ssi: $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in IR$.

Ici: $$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-4i - (\sqrt{2} + 3i)}{(1 + i) - (\sqrt{2} + 3i)}$$

$$= \frac{-\sqrt{2} - 7i}{(1 - \sqrt{2}) - 2i}$$

$$= \frac{(-\sqrt{2} - 7i)\,[(1 - \sqrt{2}) + 2i]}{(1 - \sqrt{2})^2 + 4}$$

$$\Rightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(-\sqrt{2} + 16) + i\,(-7 + 5\sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})^2 + 4}.$$

Au total: $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \notin IR$, et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. **Proposition 2**: " Il n'existe pas d'entier naturel n non nul tel que $[i\,(1 + i)]^{2n}$ soit un réel strictement positif. "

C'est faux.

Justifions le.

Pour cela, il suffit de trouver un contre-exemple.

Prenons par exemple: $n = 8$.

Dans ces conditions: $[i\,(1 + i)]^{2n} = [i\,(1 + i)]^{16}$

$\Rightarrow$ $[i\,(1 + i)]^{2n} = 16$.

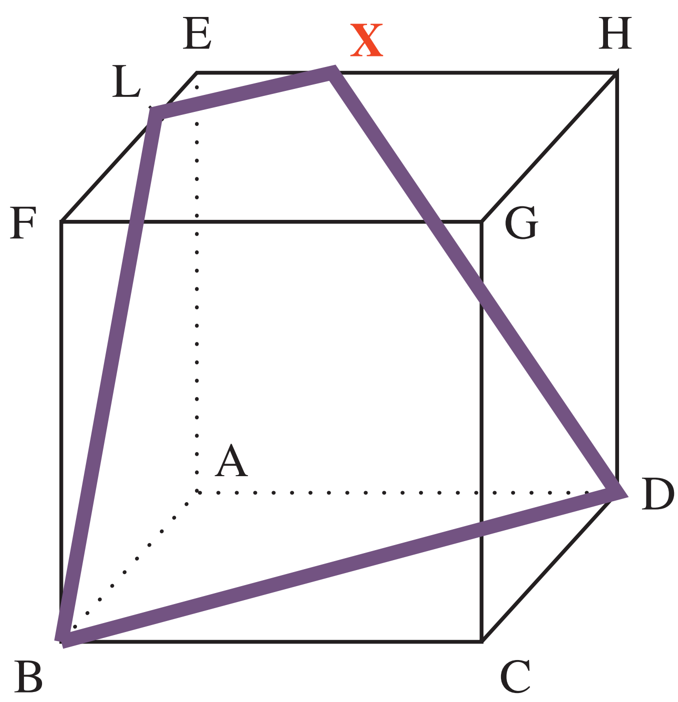
Au total: en prenant, par exemple, $n = 8$, $[i\,(1 + i)]^{2n}$ est un réel strictement positif égal à 16.

3. a. Proposition 3: **" La section du cube par le plan (BDL) est un triangle ".**

C'est faux.

Justifions le.

En effet, la section du cube par le plan (BDL) est un trapèze: le trapèze BLXD. Plus précisément, nous avons le graphique suivant:



Au total: la section du cube par le plan (BDL) est le trapèze BLXD.

3. b. Proposition 4: " Le triangle DBL est rectangle en B ".

C'est faux.

Justifions le.

Prenons par exemple comme repère, le repère orthonormale $(B ; \overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BF})$.

Dans ce repère les coordonnées des points D, B et L sont respectivement:

- $D\,(1 ; 1 ; 0)$
- $B\,(0 ; 0 ; 0)$
- $L\,(0 ; \frac{2}{3} ; 1)$.

Le triangle DBL est rectangle en B ssi les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BL}$ sont orthogonaux.

Or: • $\overrightarrow{BD}\,(1 ; 1 ; 0)$

• $\overrightarrow{BL}\,(0 ; \frac{2}{3} ; 1)$.

De plus: $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BL} = (1 \times 0) + (1 \times \frac{2}{3}) + (0 \times 1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BL} = \frac{2}{3} \neq 0$.

Et donc: $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BL}$ ne sont pas orthogonaux.

Au total: comme les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BL}$ ne sont pas orthogonaux, le triangle DBL n'est pas rectangle en B.

4. **Proposition 5**: " L'intégrale est comprise entre 1,5 et 6 ".

C'est faux.

Justifions le.

En effet: il existe une multitude de fonctions " f " qui peuvent vérifier le tableau de variation donné **et** une intégrale $I = \int_{2}^{5} f(x)\,dx$ pas comprise entre 1,5 et 6.