Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série S
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément
à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

Un astronome responsable d'un club d'astronomie a observé le ciel un soir d'août 2015 pour voir des étoiles filantes. Il a effectué des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes. Il a alors modélisé ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda = 0,2$.

Il prévoit d'emmener un groupe de nouveaux adhérents de son club lors du mois d'août 2016 pour observer des étoiles filantes. Il suppose qu'il sera dans des conditions d'observation analogues à celles d'août 2015.

L'astronome veut s'assurer que le groupe ne s'ennuiera pas et décide de faire quelques calculs de probabilités dont les résultats serviront à animer la discussion.

1. Lorsque le groupe voit une étoile filante, vérifier que la probabilité qu'il attende moins de 3 minutes pour voir l'étoile filante suivante est environ $0,451$.
2. Lorsque le groupe voit une étoile filante, quelle durée minimale doit-il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à $0,95$? Arrondir ce temps à la minute près.
3. L'astronome a prévu une sortie de deux heures. Estimer le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie.

Partie B

Ce responsable adresse un questionnaire à ses adhérents pour mieux les connaître. Il obtient les informations suivantes :

- 64 % des personnes interrogées sont des nouveaux adhérents ;
- 27 % des personnes interrogées sont des anciens adhérents qui possèdent un télescope personnel ;
- 65 % des nouveaux adhérents n'ont pas de télescope personnel.

1. On choisit un adhérent au hasard.
   Montrer que la probabilité que cet adhérent possède un télescope personnel est $0,494$.
2. On choisit au hasard un adhérent parmi ceux qui possèdent un télescope personnel.
   Quelle est la probabilité que ce soit un nouvel adhérent ? Arrondir à 10^{-3} près.

Partie C

Pour des raisons pratiques, l'astronome responsable du club souhaiterait installer un site d'observation sur les hauteurs d'une petite ville de 2500 habitants. Mais la pollution lumineuse due à l'éclairage public nuit à la qualité des observations. Pour tenter de convaincre la mairie de couper l'éclairage nocturne pendant les nuits d'observation, l'astronome réalise un sondage aléatoire auprès de 100 habitants et obtient 54 avis favorables à la coupure de l'éclairage nocturne.

L'astronome fait l'hypothèse que 50 % de la population du village est favorable à la coupure de l'éclairage nocturne. Le résultat de ce sondage l'amène-t-il à changer d'avis ?

EXERCICE 3

[Polynésie 2016]

Partie A: Etoile filante

1. Vérifions que $P(T \leqslant 3) \approx 0,451$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$.

Dans ces conditions:

- $f(t) = 0,2\, e^{-0,2t}$, $\forall\, t \in [0, +\infty[$.
- $P(T \leqslant a) = \int_0^a f(t)\, dt$.
- $E(T) = \frac{1}{\lambda}$.

Il s'agit de calculer: $P(T \leqslant 3)$.

$$P(T \leqslant 3) = \int_0^3 0,2\, e^{-0,2t}\, dt$$

$$= 0,2 \left[-\frac{1}{0,2}\, e^{-0,2t} \right]_0^3$$

$$= \left[-e^{-0,2t} \right]_0^3$$

$$\Rightarrow P(T \leqslant 3) = 1 - e^{-0,6} \Rightarrow P(T \leqslant 3) \approx 0,451.$$

Au total, la probabilité que le groupe attende moins de 3 minutes pour voir l'étoile filante suivante est d'environ: 45,1%.

2. Déterminons " a " tel que P (T ⩽ a) > 0, 95:

$P(T \leqslant a) > 0,95 \iff \int_0^a 0,2\, e^{-0,2t}\, dt > 0,95$

$\iff [-e^{-0,2t}]_0^a > 0,95$

$\iff 1 - e^{-0,2 \times a} > 0,95$

$\iff e^{-0,2 \times a} < 5\%$

$\iff -0,2 \times a < \ln(5\%)$

$\Rightarrow a > \dfrac{\ln(5\%)}{-0,2} \Rightarrow a > 14,98.$

Au total, la durée minimale, arrondie à la minute près, est de: 15 mn.

3. Estimons le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie nocturne:

Cela revient à calculer E (T).

$E(T) = \int_0^{+\infty} t \,.\, f(t)\, dt$

$= \lim\limits_{b \to +\infty} \int_0^b t \times (\lambda\, e^{-\lambda t})\, dt$

$= \dfrac{1}{\lambda}$, d'après le cours.

Comme $\lambda = 0,2$, $E(T) = 5$ minutes.

En moyenne, le groupe observe une étoile filante toutes les 5 minutes.
Donc en 2 heures, il observera 24 étoiles filantes (2 h = 24 x 5 mn).

Au total, le nombre moyen d'étoiles filantes est de: 24.

EXERCICE 3

[Polynésie 2016]

Partie B: Adhérents et téléscope

1. Montrons que la probabilité que cet adhérent, choisit au hasard, possède un téléscope personnel est de 0. 494:

D'après l'énoncé, nous avons:

- $A =$ " la personne interrogée est un nouvel adhérent ".
- $B =$ " la personne interrogée possède un téléscope ".

- $P(A) = 64\%$
- $P(\bar{A}) = 36\%$

  $(64\% + 36\% = 1)$.

- $P_A(B) = 35\%$
- $P_A(\bar{B}) = 65\%$

  $(35\% + 65\% = 1)$.

- $P(\bar{A} \cap B) = 27\%$.

Nous devons ainsi calculer: $P(B)$.

Or, l'événement $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$.

D'où : $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$

$$= P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A}).$$

Ainsi : $P(B) = 35\% \times 64\% + \left[\dfrac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})}\right] \times 36\%$

$\Rightarrow \; P(B) = 0.494.$

Au total, il y a 49. 4% de chance pour que l'adhérent, choisit au hasard, possède un téléscope personnel.

2. Déterminons la probabilité que ce soit un nouvel adhérent:

Cela revient à calculer: $P_B(A)$.

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} \iff P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}.$$

Ainsi: $P_B(A) = \dfrac{35\% \times 64\%}{49.4\%} \Rightarrow P_B(A) \approx 45.34\%.$

Au total, il y a 45. 34% de chance pour que ce soit un nouvel adhérent.

Partie C: L'avis de l'astronome

Le résultat du sondage amène-t-il le responsable à changer d'avis ?

Ici, nous avons: • $n = 100$

• $p = 50\%$ (par hypothèse)

• $f = \dfrac{54}{100} \Rightarrow f = 54\%.$

Dans ces conditions:

$n = 100 \geq 30$, $n.p = 50 \geq 5$ et $n.(1-p) = 50 \geq 5$.

Les conditions sont donc réunies.

On choisit un échantillon aléatoire de 100 personnes parmi les 2 500 habitants.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[\, p - 1.96 \times \left(\frac{p\,(1-p)}{n} \right)^{1/2} ;\, p + 1.96 \times \left(\frac{p\,(1-p)}{n} \right)^{1/2} \right],$$

cad: $I = [\, 0.5 - 1.96 \times 0.05 \,;\, 0.5 + 1.96 \times 0.05 \,]$.

À l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [\, 0.402 \,;\, 0.598 \,]$.

Or la fréquence d'habitants favorables " f ", sur l'échantillon, est telle que:

$$f = 54\% \in I.$$

Ainsi, l'astronome ne changera pas d'avis.