

# EXERCICE 2

[ Polynésie 2016 ]

1. Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites U et V ?

Les formules sont:

• En C2: on entre  $\ll = B_2 + 2 * A_2 * A_2 + 3 * A_2 + 5 \gg$

ou:  $\ll = B_2 + 2 * A_2 \wedge 2 + 3 * A_2 + 5 \gg$ .

• En B3: on entre  $\ll = 2 * B_2 + 2 * A_2 * A_2 - A_2 \gg$

ou:  $\ll = 2 * B_2 + 2 * A_2 \wedge 2 - A_2 \gg$ .

2. Déterminons, en justifiant, une expression de  $V_n$  et de  $U_n$  en fonction uniquement de n:

Prenons:  $V_n = U_n + 2n^2 + 3n + 5$  (1).

Des calculs faits au brouillon, à partir de l'expression (1), permettent d'affirmer que, a priori, la suite  $(V_n)$  est géométrique et s'écrit:  $V_n = 7 \times 2^n$ .

Ainsi, nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n:  $V_n = 7 \times 2^n$  ".

Initialisation: •  $V_0 = U_0 + 2(0)^2 + 3 \times 0 + 5$   
 $= 2 + 2(0)^2 + 3 \times 0 + 5$  (car  $U_0 = 2$ )  
 $\Rightarrow V_0 = 7$ .

Donc nous avons bien:  $V_0 = 7 \times 2^0$ .

•  $V_1 = U_1 + 2(1)^2 + 3 \times 1 + 5$

$$= 4 + 2(1)^2 + 3 \times 1 + 5 \quad (\text{car } U_1 = 4)$$

$$\Rightarrow V_1 = 14.$$

Donc nous avons bien:  $V_1 = 7 \times 2^1$ .

**Hérédité:** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons  $V_n = 7 \times 2^n$   
et montrons qu'alors:  $V_{n+1} = 7 \times 2^{(n+1)}$ .

**Supposons:**  $V_n = 7 \times 2^n$ , pour un entier naturel  $n$  fixé.

(2)

$$(2) \Rightarrow V_n - (2n^2 + 3n + 5) = 7 \times 2^n - (2n^2 + 3n + 5)$$

$$\Rightarrow U_n = 7 \times 2^n - (2n^2 + 3n + 5)$$

$$\Rightarrow 2U_n = 2 \times 7 \times 2^n - 2(2n^2 + 3n + 5)$$

$$\Rightarrow 2U_n + 2n^2 - n = 7 \times 2^{(n+1)} - 4n^2 - 6n - 10 + 2n^2 - n$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = 7 \times 2^{(n+1)} - 2n^2 - 7n - 10$$

$$\Rightarrow U_{n+1} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) + 5 = 7 \times 2^{(n+1)}$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = 7 \times 2^{(n+1)}.$$

**Conclusion:** Pour tout entier naturel  $n$ , nous avons:  $V_n = 7 \times 2^n$ .

En conclusion, les expressions de  $V_n$  et de  $U_n$  en fonction uniquement de  $n$  sont:

- $V_n = 7 \times 2^n$ .

- $U_n = 7 \times 2^n - (2n^2 + 3n + 5)$ .