Corrigé
Exercice 1

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément
à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

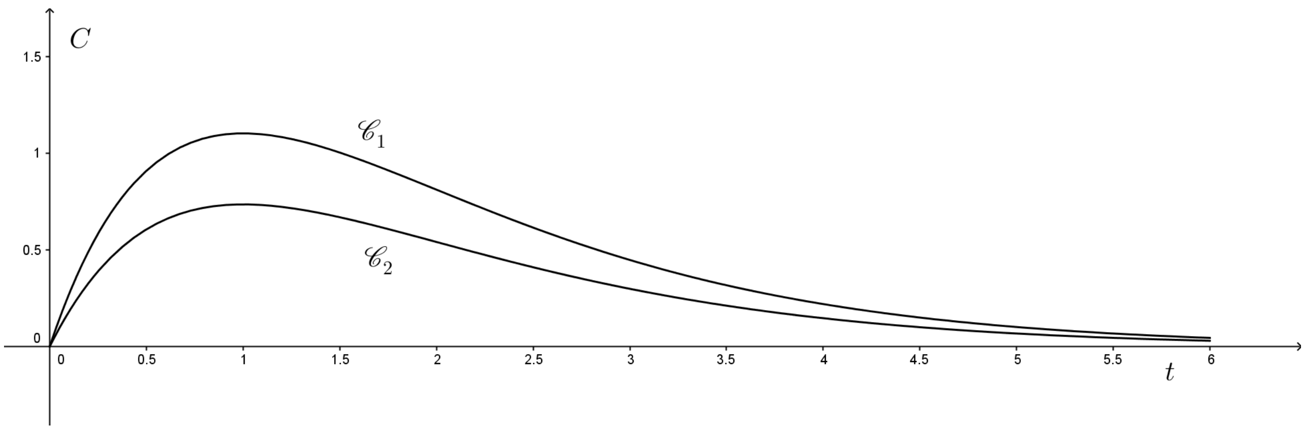
EXERCICE 1 (7 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

Voici deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.
C est exprimée en gramme par litre et t en heure.

Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps.



1. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et on note C' sa fonction dérivée. À un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$.
   À quel instant cette vitesse est-elle maximale ?

   On dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.

2. Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.

3. Une personne à jeûn absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(t) = A\,t\,\mathrm{e}^{-t}$$

   où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.

   a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(0)$.

   b) L'affirmation suivante est-elle vraie ?
   « À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. »

Partie B - Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(t) = 2\,t\,\mathrm{e}^{-t}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.
3. Rappeler la limite de $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de $0,2$ g.L^{-1} pour un jeune conducteur.
   a) Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 0,2$.
   b) Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ?
   Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.
5. La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à 5×10^{-3} g.L^{-1}.
   a) Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.
   b) On donne l'algorithme suivant où f est la fonction définie par $f(t) = 2\,t\,\mathrm{e}^{-t}$.

Initialisation :	t prend la valeur $3,5$
	p prend la valeur $0,25$
	C prend la valeur $0,21$
Traitement :	Tant que $C > 5\times10^{-3}$ faire :
	| t prend la valeur $t+p$
	| C prend la valeur $f(t)$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher t

Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en exécutant cet algorithme. Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25		
t	3,5		
C	0,21		

Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?

EXERCICE 1

[Polynésie 2016]

Partie A: Étude de fonction

1. Déterminons à quel instant la vitesse est maximale:

D'après l'énoncé, à un instant $t \geqslant 0$, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est $C'(t)$.

Or, $C'(t)$ correspond à la pente de la tangente aux courbes C_1 et C_2, en un point donné d'abscisse t.

Graphiquement, cette dernière est maximale quand:

- $t = 0$, pour C_1
- $t = 0$, pour C_2.

En définitive, dans les 2 cas, la vitesse est maximale quand: $t = 0$.

2. Déterminons la courbe correspondante à la personne la plus corpulente:

Une personne de forte corpulence subit moins vite les effets de l'alcool, donc:

la courbe C_2 correspond à la personne la plus corpulente.

3. a. Déterminons $f'(0)$:

Ici:
- $f(t) = A\,t\,e^{-t}$
- $Df = [0;+\infty[$.

Posons: $f = f_1 \times f_2$, avec: $f_1(t) = A.t$ et $f_2(t) = e^{-t}$.

f_1 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur $[0;+\infty[$.

f_2 est dérivable sur IR comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur $[0;+\infty[$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $t \in [0;+\infty[$.

Pour tout $t \in [0;+\infty[$: $f'(t) = (A \times e^{-t}) + (A \times t \times (-e^{-t}))$

$\Rightarrow f'(t) = A\, e^{-t}\,(1 - t)$.

Dans ces conditions: $f'(0) = A$.

Au total: $f'(0) = A$.

3. b. L'affirmation est-elle vraie ?

FAUX: d'après la question 2.

Partie B: Un cas particulier

1. Étudions les variations de f sur $[0;+\infty[$:

Ici: • $A = 2$, car: $f(t) = 2te^{-t}$

• $f'(t) = 2e^{-t}(1 - t)$.

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout t de $[0;+\infty[$.

1^er^ cas: $f'(t) = 0$.

$f'(t) = 0 \iff 2e^{-t}(1 - t) = 0$

$\iff 1 - t = 0$, car $2e^{-t} > 0$

$\implies t = 1$.

2^eme^ cas: $f'(t) < 0$.

$f'(t) < 0 \iff 2e^{-t}(1 - t) < 0$

$\iff 1 - t < 0$, car $2e^{-t} > 0$

$\implies t > 1$ ou $t \in]1;+\infty[$.

3^eme^ cas: $f'(t) > 0$.

$f'(t) > 0 \iff 2e^{-t}(1 - t) > 0$

$\iff 1 - t > 0$, car $2e^{-t} > 0$

$\implies t < 1$ ou $t \in [0;1[$.

Au total:
- f est décroissante sur $[1;+\infty[$,
  (car sur $[1;+\infty[$, $f'(t) \leqslant 0$)
- f est croissante sur $[0;1]$.
  (car sur $[0;1]$, $f'(t) \geqslant 0$)

Nous pouvons dresser alors le tableau de variation suivant:

t	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = 0$,

• $b = f(1) \Rightarrow b = 2e^{-1}$,

• $c = f(+\infty) \Rightarrow c = 0$.

($\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2t}{e^t} = 0$, d'après le cours)

2. Déterminons l'instant où la concentration d'alcool dans le sang est maximale:

D'après le tableau de variation, la concentration d'alcool dans le sang est maximale quand: $t = 1$.

En conclusion: • la concentration est maximale quand $t = 1$,

• elle est alors égale à $f(1) = \dfrac{2}{e}$ g/L,

• la concentration maximale, à 10^{-2} près, est alors égale à $f(1) \approx 0,74$ g/L.

3. Rappelons la limite de $\dfrac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$, et déduisons-en celle de $f(t)$ en $+\infty$:

D'après le cours: $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$, d'après le théorème des croissances comparées.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t}{e^t} = 0$.

Et donc: $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} 2te^{-t}$

$$= \lim_{t \to +\infty} 2\left(\frac{t}{e^t}\right)$$

$$= 2 \times 0$$

$$= 0.$$

Cela signifie que: quand t est très grand, cad au bout d'un certain temps, il n'y aura plus aucune trace d'alcool dans le sang.

4. a. Montrons qu'il existe 2 réels t_1 et t_2 avec $f(t_1) = f(t_2) = 0$:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.

  Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a;b]$ tel que: $f(c) = K$.

  Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a;b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a;b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a;b]$.

Ici:
- f est continue sur $[0;1[$ et est strictement croissante sur $[0;1[$.
- f est continue sur $[1;+\infty[$ et est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

De plus:
- sur $[0;1[$, " $K = 0,2$ " est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

  En effet: $0 \leqslant 0,2 \leqslant 2e^{-1}$.
- sur $]1;+\infty[$, " $K = 0,2$ " est compris entre $f(c)$ et $f(b)$.

  En effet: $0 \leqslant 0,2 \leqslant 2e^{-1}$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(t) = 0,2$ $(K = 0,2)$ admet une solution unique appartenant à $[0;1[$ et une solution unique appartenant à $]1;+\infty[$.

Au total: il existe bien 2 nombres t_1 ($t_1 \in [0;1[$) et t_2 ($t_2 \in]1;+\infty[$) qui sont tels que:

$$f(t_1) = f(t_2) = 0,2.$$

4. b. Déterminons la durée minimale avant de pouvoir prendre le volant:

Pour répondre à cette question, nous avons le choix entre t_1 et t_2.

Nous retiendrons t_2 car entre t_1 et t_2, le taux d'alcoolémie est en phase croissante puis décroissante mais dépasse toujours "0, 2".

À l'aide d'une machine à calculer et par tâtonnement, on trouve:

$$t_2 \approx 3,578 \text{ heures.}$$

Au total, la durée minimale que Paul doit attendre avant de pouvoir prendre le volant est de: 3, 578 heures cad: 3 heures et 35 minutes.

5. a. Justifions qu'il existe un instant T:

Ici, il s'agit de déterminer " T " tel que: $f(T) = 5 \times 10^{-3}$.

Or: $5 \times 10^{-3} \in]1;+\infty[$*.

* car: c'est dans l'intervalle $]1;+\infty[$ que le taux d'alcoolémie diminue.

Or sur $]1;+\infty[$:
- f est continue
- f est strictement décroissante
- " $K = 5.10^{-3}$ " est compris entre $f(c)$ et $f(b)$,
  car: $0 \leqslant 5.10^{-3} \leqslant 2e^{-1}$.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, **oui**, il existe un instant " T " à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

5. b. Recopions et complétons le tableau en exécutant l'algorithme:

Le tableau complété est le suivant:

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0, 25	0, 25	0, 25
t	3, 5	3, 75	4
C	0, 21	0, 18	0, 15

Notons que: la valeur affichée par l'algorithme correspond au temps nécessaire, en heure, pour que l'alcool ne soit plus détectable dans le sang.