

# Sujet Spécialité

MATHÉMATIQUES  
POLYNÉSIE  
BAC S - 2015



---

---

freemaths.fr

---

---

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

## MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7 dont une annexe en page 7/7 qui est à rendre avec la copie.

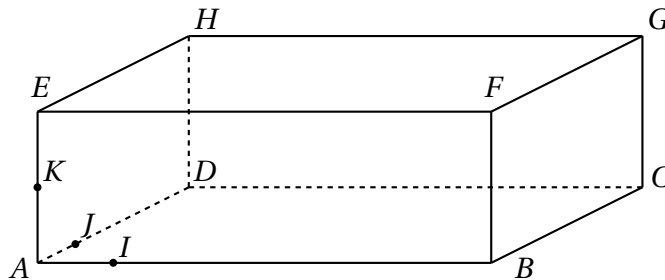
Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. **Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.** Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

**EXERCICE 1 (3 points)**

On considère le pavé droit  $ABCDEFGH$  ci-dessous, pour lequel  $AB = 6$ ,  $AD = 4$  et  $AE = 2$ .

$I, J$  et  $K$  sont les points tels que  $\vec{AI} = \frac{1}{6} \vec{AB}$ ,  $\vec{AJ} = \frac{1}{4} \vec{AD}$ ,  $\vec{AK} = \frac{1}{2} \vec{AE}$ .



On se place dans le repère orthonormé  $(A; \vec{AI}, \vec{AJ}, \vec{AK})$ .

1. Vérifier que le vecteur  $\vec{n}$  de coordonnées  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$  est normal au plan  $(IJG)$ .
2. Déterminer une équation du plan  $(IJG)$ .
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection  $L$  du plan  $(IJG)$  et de la droite  $(BF)$ .
4. Tracer la section du pavé  $ABCDEFGH$  par le plan  $(IJG)$ . Ce tracé sera réalisé sur la figure donnée en **annexe (à rendre avec la copie)**. On ne demande pas de justification.

## EXERCICE 2 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . À tout point  $M$  d'affixe  $z$  du plan, on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3$$

1. Un point  $M$  est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point  $M'$  associé.  
Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.
2. Soit  $A$  le point d'affixe  $\frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$  et  $B$  le point d'affixe  $\frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$ .  
Montrer que  $OAB$  est un triangle équilatéral.
3. Déterminer l'ensemble  $\mathcal{E}$  des points  $M$  d'affixe  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont réels, tels que le point  $M'$  associé soit sur l'axe des réels.
4. Dans le plan complexe, représenter les points  $A$  et  $B$  ainsi que l'ensemble  $\mathcal{E}$ .

## EXERCICE 3 (3 points)

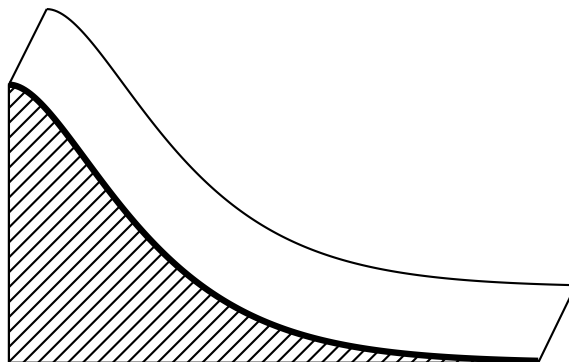
Dans un pays, la taille en centimètres des femmes de 18 à 65 ans peut être modélisée par une variable aléatoire  $X_1$  suivant la loi normale d'espérance  $\mu_1 = 165$  cm et d'écart-type  $\sigma_1 = 6$  cm, et celle des hommes de 18 à 65 ans, par une variable aléatoire  $X_2$  suivant la loi normale d'espérance  $\mu_2 = 175$  cm et d'écart-type  $\sigma_2 = 11$  cm. Dans cet exercice tous les résultats seront arrondis à  $10^{-2}$  près.

1. Quelle est la probabilité qu'une femme choisie au hasard dans ce pays mesure entre 1,53 mètre et 1,77 mètre ?
2.
  - a) Déterminer la probabilité qu'un homme choisi au hasard dans ce pays mesure plus de 1,70 mètre.
  - b) De plus, on sait que dans ce pays les femmes représentent 52% de la population des personnes dont l'âge est compris entre 18 et 65 ans. On choisit au hasard une personne qui a entre 18 et 65 ans. Elle mesure plus de 1,70 m. Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?

#### EXERCICE 4 (5 points)

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.

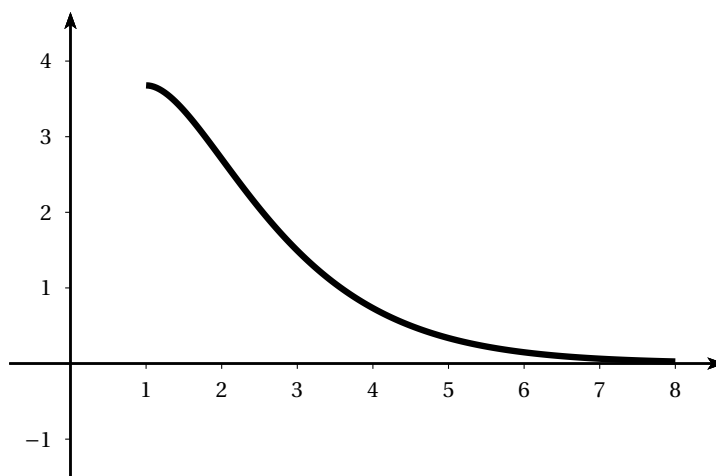
Voici ce schéma :



#### Partie A : Modélisation

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe  $\mathcal{C}$  représentant la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[1; 8]$  par  $f(x) = (ax + b)e^{-x}$  où  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels.

La courbe  $\mathcal{C}$  est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1. On souhaite que la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  en son point d'abscisse 1 soit horizontale. Déterminer la valeur de l'entier  $b$ .
2. On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut. Déterminer la valeur de l'entier  $a$ .

#### Partie B : Un aménagement pour les visiteurs

On admet dans la suite que la fonction  $f$  introduite dans la partie A est définie pour tout réel  $x \in [1; 8]$  par  $f(x) = 10xe^{-x}$ .

Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artiste sur une seule face, hachurée sur le schéma en début d'exercice. Sur le devis qu'il propose, celui-ci demande un forfait de 300 euros augmenté de 50 euros par mètre carré peint.

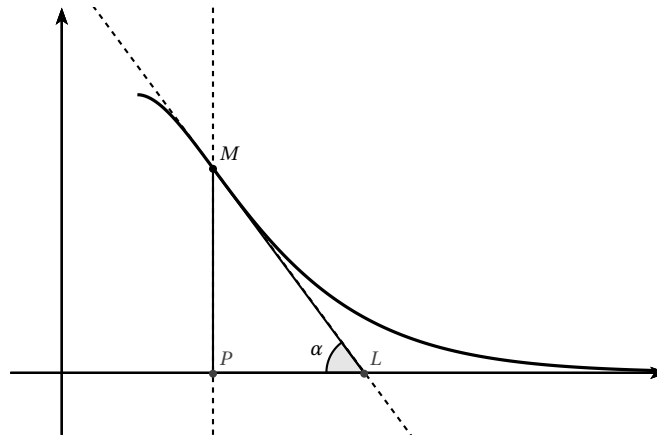
1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $[1 ; 8]$  par  $g(x) = 10(-x - 1)e^{-x}$ . Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $g$ .
2. Quel est le montant du devis de l'artiste ?

**Partie C : Une contrainte à vérifier**

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.

On considère un point  $M$  de la courbe  $\mathcal{C}$ , d'abscisse différente de 1. On appelle  $\alpha$  l'angle aigu formé par la tangente en  $M$  à  $\mathcal{C}$  et l'axe des abscisses.

La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle  $\alpha$  soit inférieur à 55 degrés.

1. On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1 ; 8]$ . On admet que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[1 ; 8]$ ,  $f'(x) = 10(1 - x)e^{-x}$ . Etudier les variations de la fonction  $f'$  sur l'intervalle  $[1 ; 8]$ .
2. Soit  $x$  un réel de l'intervalle  $]1 ; 8]$  et soit  $M$  le point d'abscisse  $x$  de la courbe  $\mathcal{C}$ . Justifier que  $\tan \alpha = |f'(x)|$ .
3. Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?

### EXERCICE 5 (5 points)

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ .

1. On appelle  $I$  la matrice identité d'ordre 2.  
Vérifier que  $A^2 = A + 2I$ .
2. En déduire une expression de  $A^3$  et une expression de  $A^4$  sous la forme  $\alpha A + \beta I$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels.
3. On considère les suites  $(r_n)$  et  $(s_n)$  définies par  $r_0 = 0$  et  $s_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2r_n \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $A^n = r_n A + s_n I$ .

4. Démontrer que la suite  $(k_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par  $k_n = r_n - s_n$  est géométrique de raison  $-1$ . En déduire, pour tout entier naturel  $n$  non nul, une expression explicite de  $k_n$  en fonction de  $n$ .
5. On admet que la suite  $(t_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par  $t_n = r_n + \frac{(-1)^n}{3}$  est géométrique de raison 2. En déduire, pour tout entier naturel  $n$  non nul, une expression explicite de  $t_n$  en fonction de  $n$ .
6. Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel  $n$  non nul, une expression explicite de  $r_n$  et  $s_n$  en fonction de  $n$ .
7. En déduire alors, pour tout entier naturel  $n$  non nul, une expression des coefficients de la matrice  $A^n$ .

# Annexe

À rendre avec la copie

## EXERCICE 1

