

EXERCICE 3

[Polynésie 2015]

1. Calculons $P(153 \leq X_1 \leq 177)$:

- X_1 suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 165$ et d'écart type $\sigma_1 = 6$.

Il s'agit de calculer: $P(153 \leq X_1 \leq 177)$.

Nous remarquons que: $153 = \mu_1 - 2\sigma_1$ et $177 = \mu_1 + 2\sigma_1$.

Or, d'après le cours, $P(\mu_1 - 2\sigma_1 \leq X_1 \leq \mu_1 + 2\sigma_1) \approx 0,954$.

D'où: $P(153 \leq X_1 \leq 177) \approx 0,954$.

Au total, la probabilité qu'une femme choisie au hasard mesure entre 1,53 m et 1,77 m est de: 95,4%.

2. a. Calculons $P(X_2 \geq 170)$:

- X_2 suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 175$ et d'écart type $\sigma_2 = 11$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

$$\begin{aligned} P(X_2 \geq 170) &= P\left(\frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2} \geq \frac{170 - 175}{11}\right) \\ &= P\left(T \geq \frac{-5}{11}\right) \\ &= P(T \leq 0,454). \end{aligned}$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(X_2 \geq 170) \approx 0,673.$$

Au total, la probabilité qu'un homme choisi au hasard mesure plus de 1,70 m est de: 67,3%.

2. b. Déterminons la probabilité que cette personne soit une femme:

Il s'agit de calculer: $P_{170}(F)$.

- **Données:**
 - 68% des hommes mesurent plus de 1,70 m.
 - Il y a 48% d'hommes.
- **Calcul de x :**
 - x % des femmes mesurent plus de 1,70 m.
 - Il y a 52% de femmes.

Dans ces conditions, $x = P(X_1 \geq 170)$.

$$\begin{aligned} P(X_1 \geq 170) &= P\left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \geq \frac{170 - 165}{6}\right) \\ &= P(T \geq 0,833). \end{aligned}$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$x \approx 0,204 \Rightarrow x \approx 20\%.$$

• **Calcul de $P_{170}(F)$:**

(probabilité d'être une femme sachant que la personne mesure plus de 170 cm)

L'événement $170 = (170 \cap H) \cup (170 \cap F)$.

D'où: $P(170) = P(170 \cap H) + P(170 \cap F)$

$\begin{pmatrix} H = \text{Hommes} \\ F = \text{Femmes} \end{pmatrix}$

$$= P_H(170) \times P(H) + P_F(170) \times P(F).$$

Ainsi: $P(170) = 0,68 \times 0,48 + 0,2 \times 0,52$

$$\Rightarrow P(170) \approx 43,04\%.$$

Dans ces conditions: $P_{170}(F) = \frac{P(170 \cap F)}{P(170)}$

$$\Rightarrow P_{170}(F) \approx 24,1\%.$$

Au total, la probabilité d'être une femme sachant que la personne mesure plus de 170 cm est d'environ: 24%.