EXERCICE 2 (Polynésie 2015)

① **Montrons qu'il existe 2 points invariants et donnons l'affixe de ces 2 points sous forme algébrique et exponentielle:**

a. Sous forme algébrique ?

Un point M d'affixe z ($z \neq 0$) est invariant ssi : $z' = z$.

$z' = z \iff z^2 + 4z + 3 = z \implies z^2 + 3z + 3 = 0.$

Soit l'équation : $z^2 + 3z + 3 = 0.$

$\Delta = -3 \implies \Delta = (\sqrt{3}\, i)^2.$

D'où 2 solutions dans $\mathbb{C}$:

- $z_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$,
- $z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Au total, sous forme algébrique, les 2 solutions sont:

$$z_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

b. Sous forme exponentielle ?

(b1). Le module de z_1 est: $|z_1| = \sqrt{3}$.

. Soit θ, l'argument de z_1 :

$$z_1 = \sqrt{3}\,(\cos\theta + i \sin\theta)$$
$$= \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\right).$$

Par identification:

$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Sous forme exponentielle z_1 s'écrit: $z_1 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

(b2). Le module de z_2 est : $|z_2| = \sqrt{3}$.

. Soit θ, l'argument de z_2 :

$$z_2 = \sqrt{3}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right).$$

Par identification:

$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Sous forme exponentielle z_2 s'écrit: $z_2 = \sqrt{3}\, e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

Au total, sous forme exponentielle, les 2 solutions s'écrivent:

$$z_1 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{3}\, e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$$

② Montrons que OAB est un triangle équilatéral:

OAB est un triangle équilatéral ssi: $OA = OB = AB$.

Or: . $OA = |z_1| \Rightarrow OA = \sqrt{3}$,

. $OB = |z_2| \Rightarrow OB = \sqrt{3}$,

. $AB = |z_2 - z_1| \Rightarrow AB = \sqrt{3}$.

Au total, comme $OA = OB = AB$: le triangle OAB est bien un triangle équilatéral.

③ Déterminons l'ensemble $\mathcal{E}$:

Soit $M'(z')$ avec : $z' = x' + iy'$.

M' est sur l'axe des réels ssi : $y' = 0$.

Or : $z' = z^2 + 4z + 3$, avec : $z = x + iy$.

D'où : $z' = (x^2 - y^2 + 4x + 3) + i(2xy + 4y)$.

Ainsi : M' est sur l'axe des réels ssi :

$2xy + 4y = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $x = -2$.

Au total : l'ensemble $\mathcal{E}$ correspond à l'axe des abscisses $(y=0)$ et des points de la droite d'équation $x = -2$.

④ Représentation graphique :

Dans le plan complexe, les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}$ sont représentés sur le graphique suivant :