Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7 dont une annexe en page 7/7 qui est à rendre avec la copie.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 2 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3$$

1. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.

Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

2. Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

3. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe $z = x + iy$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.

4. Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathscr{E}$.

EXERCICE 2 (Polynésie 2015)

① **Montrons qu'il existe 2 points invariants et donnons l'affixe de ces 2 points sous forme algébrique et exponentielle:**

a. Sous forme algébrique ?

Un point M d'affixe z $(z \neq 0)$ est invariant ssi : $z' = z$.

$z' = z \iff z^2 + 4z + 3 = z \implies z^2 + 3z + 3 = 0$.

Soit l'équation : $z^2 + 3z + 3 = 0$.

$\Delta = -3 \implies \Delta = (\sqrt{3}\, i)^2$.

D'où 2 solutions dans $\mathbb{C}$:

- $z_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$,
- $z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Au total, sous forme algébrique, les 2 solutions sont:

$$z_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i .$$

b. Sous forme exponentielle ?

(b1). Le module de z_1 est: $|z_1| = \sqrt{3}$.

. Soit θ, l'argument de z_1 :

$$z_1 = \sqrt{3}\,(\cos\theta + i \sin\theta)$$
$$= \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\right).$$

Par identification:

$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Sous forme exponentielle z_1 s'écrit : $z_1 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

(b2). Le module de z_2 est : $|z_2| = \sqrt{3}$.

. Soit θ, l'argument de z_2 :

$$z_2 = \sqrt{3}(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right).$$

Par identification :

$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Sous forme exponentielle z_2 s'écrit : $z_2 = \sqrt{3}\, e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

Au total, sous forme exponentielle, les 2 solutions s'écrivent :

$$z_1 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{3}\, e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$$

② Montrons que OAB est un triangle équilatéral :

OAB est un triangle équilatéral ssi : $OA = OB = AB$.

Or : . $OA = |z_1| \Rightarrow OA = \sqrt{3}$,

. $OB = |z_2| \Rightarrow OB = \sqrt{3}$,

. $AB = |z_2 - z_1| \Rightarrow AB = \sqrt{3}$.

Au total, comme $OA = OB = AB$: le triangle OAB est bien un triangle équilatéral.

③ Déterminons l'ensemble $\mathcal{E}$:

Soit $M'(z')$ avec : $z' = x' + iy'$.

M' est sur l'axe des réels ssi : $y' = 0$.

Or : $z' = z^2 + 4z + 3$, avec : $z = x + iy$.

D'où : $z' = (x^2 - y^2 + 4x + 3) + i(2xy + 4y)$.

Ainsi : M' est sur l'axe des réels ssi :

$2xy + 4y = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $x = -2$.

Au total : l'ensemble $\mathcal{E}$ correspond à l'axe des abscisses $(y=0)$ et des points de la droite d'équation $x = -2$.

④ Représentation graphique :

Dans le plan complexe, les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}$ sont représentés sur le graphique suivant :