Corrigé

Exercice 5

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7 dont une annexe en page 7/7 qui est à rendre avec la copie.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 5 (5 points)

Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = \ln(2)$ et, pour tout entier naturel n non nul, $v_{n+1} = \ln\left(2 - \mathrm{e}^{-v_n}\right)$.

On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel n non nul.

On définit ensuite la suite (S_n) pour tout entier naturel n non nul par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de (S_n).

Partie A Conjectures à l'aide d'un algorithme

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche la valeur de S_n pour une valeur de n choisie par l'utilisateur :

Variables :	n, k entiers
	S, v réels
Initialisation :	Saisir la valeur de n
	v prend la valeur ...
	S prend la valeur ...
Traitement :	Pour k variant de ... à ... faire
	... prend la valeur ...
	... prend la valeur ...
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

2. À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de S_n. Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

n	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
S_n	2,4	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite (S_n).

Partie B Étude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$.

1. Vérifier que $u_1 = 2$ et que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.
2. Calculer u_2, u_3 et u_4. Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Partie C Étude de (S_n).

1. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de u_n, puis v_n en fonction de n.
2. Vérifier que $S_3 = \ln(4)$.
3. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer S_n en fonction de n . En déduire la limite de la suite (S_n).

EXERCICE 5

[Polynésie 2015]

Partie A: Conjectures à l'aide d'un algorithme

1. Recopions et complétons l'algorithme:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

Initialisation:	Saisir la valeur de n
	V prend la valeur $\ln(2)$
	S prend la valeur 0
Traitement:	Pour k variant de 1 à n faire
	S prend la valeur $S + V$
	V prend la valeur $\ln(2 - e^{-V})$
	Fin Pour

2. Émettons une conjecture quant au comportement de la suite (S_n):

D'après les données du tableau, on pourrait, a priori, penser que: la suite (S_n) est croissante et semble converger vers $+\infty$.

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

1. Vérifions que $U_1 = 2$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = 2 - \frac{1}{U_n}$:

Ici : • $U_1 = e^{V_1}$

$= e^{\ln(2)}$

$= 2$;

• $U_{n+1} = e^{V_{n+1}}$

$= e^{\ln(2 - e^{-V_n})}$

$= 2 - e^{-V_n}$

$= 2 - \frac{1}{e^{V_n}}$

$= 2 - \frac{1}{U_n}$, car : $U_n = e^{V_n}$.

Au total, nous avons bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_1 = 2$ et $U_{n+1} = 2 - \frac{1}{U_n}$.

2. Calculons U_2, U_3 et U_4 :

• $U_2 = 2 - \frac{1}{U_1}$ cad : $U_2 = \frac{3}{2}$,

• $U_3 = 2 - \frac{1}{U_2}$ cad : $U_3 = \frac{4}{3}$,

• $U_4 = 2 - \frac{1}{U_3}$ cad : $U_4 = \frac{5}{4}$.

Ainsi : $U_2 = \frac{3}{2}$, $U_3 = \frac{4}{3}$ et $U_4 = \frac{5}{4}$.

Partie C : Étude de (S_n)

1. Exprimons V_n en fonction de U_n, puis V_n en fonction de n :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $V_n = \ln(U_n)$, car : $U_n = e^{V_n}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $V_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$, car : $U_n = \frac{n+1}{n}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n non nul : $V_n = \ln(U_n)$ et $V_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

2. Vérifions que $S_3 = \ln(4)$:

Nous avons : $S_3 = V_1 + V_2 + V_3$

$= \ln(U_1) + \ln(U_2) + \ln(U_3)$, car : $V_n = \ln(U_n)$

$= \ln(2) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right)$

$= \ln\left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3}\right)$ cad : $S_3 = \ln(4)$.

Au total, nous avons bien : $S_3 = \ln(4)$.

3. a. Exprimons S_n en fonction de n :

Pour tout entier naturel n non nul : $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$.

Dans ces conditions : $S_n = \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \ln\left(\frac{5}{4}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$= \ln\left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{n}{n-1} \times \frac{n+1}{n}\right)$

$= \ln(n+1)$, car tout se simplifie.

Au total, pour tout entier naturel n non nul: $S_n = \ln(n+1)$.

3. b. Déduisons-en la limite de la suite (S_n):

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \ln(n+1)$$

$$= +\infty.$$

Ainsi, en $+\infty$: la suite (S_n) tend vers $+\infty$.

Elle est donc divergente.