Corrigé

Exercice 3

LES MATHÉMATIQUES

AU BACCALAURÉAT S

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE, BAC S

- Droites et Plans
- Triangle rectangle, Théorème de Pythagore
- Triangle isocèle
- Tétraèdre
- Distance entre deux points
- Vecteurs colinéaires ou coplanaires
- Droites sécantes
- Produit scalaire et Norme d'un vecteur
- Vecteurs orthogonaux
- Représentation paramétrique d'une droite
- Equation cartésienne d'un plan
- Théorème du Toit

EXERCICE 3

[Liban 2019]

Partie A:

1. Montrons que la droite (AC) est orthogonale au plan (BAD):

Nous avons: • d est orthogonale à P donc elle est orthogonale à toute droite de ce plan et en particulier à (AC). Donc (BD) est orthogonale à (AC).

• Comme le triangle ABC est rectangle en A: les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

• (AC) est donc orthogonale aux deux droites sécantes (BD) et (AB) du plan (BAD).

Ainsi: la droite (AC) est bien orthogonale au plan (BAD).

2. Montrons que le tétraèdre ABCD est un bicoin:

D'après l'énoncé: " **un bicoin est un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles** ".

Pour répondre à cette question, nous devons montrer que les triangles ABC, ACD, DBA et DBC sont des triangles rectangles.

Or: • ABC est rectangle en A, d'après l'énoncé.

• Comme la droite (AC) est orthogonale au plan (BAD), le triangle ACD est rectangle en A.

• d est perpendiculaire à P, donc les triangles DBA et DBC sont rectangles en B.

Ainsi, comme les quatre faces du tétraèdre sont des triangles rectangles:

le tétraèdre ABCD est un bicoin.

3. a. Justifions que l'arête [CD] est la plus longue du bicoin ABCD:

En ayant recours aux propriétés des triangles rectangles:

- ABC est rectangle en A, donc: $BC > AB$ et $BC > AC$;
- ACD est rectangle en A, donc: $CD > AC$ et $CD > AD$;
- DBA est rectangle en B, donc: $DA > DB$ et $DA > BA$;
- DBC est rectangle en B, donc: $DC > DB$ et $DC > BC$.

Ainsi, nous avons:
- $DC > BC > AB$
- $DC > BC > AC$
- $CD > AD > DB$.

Au total: **oui**, l'arête [CD] est la plus longue du bicoin ABCD.

3. b. Montrons que le point I est équidistant des 4 sommets du bicoin ABCD:

I est le milieu de l'arête [CD].

I est donc le milieu de l'hypoténuse [CD] du triangle ACD rectangle en A. I correspond ainsi au centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Nous pouvons donc écrire: $IA = IC = ID$.

De plus, I est aussi le milieu de l'hypoténuse [CD] du triangle DBC rectangle en B. I correspond ainsi au centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Et, nous pouvons écrire: **$ID = IB = IC$.**

Au total, nous avons donc: $IA = IC = ID = IB$.

Donc oui, le point I est bien équidistant des 4 sommets du bicoin ABCD.

Partie B:

1. Déterminons une équation cartésienne du plan P orthogonal à la droite d passant par le point A:

Ici: • $\vec{n}$ ($a = 2$ $b = -2$ $c = 1$) est un vecteur directeur de la droite d ;

• A (3; 1; - 5) est un point de l'espace.

D'où une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est: $a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) + c\,(z - z_A) = 0$

<=> $2\,(x - 3) + (-2)\,(y - 1) + 1\,(z - (-5)) = 0$

<=> $2x - 2y + z + 1 = 0$.

En conclusion, une équation cartésienne du plan P est: $2x - 2y + z + 1 = 0$.

2. Montrons que le point B (5 ; 5 ; - 1) est le point d'intersection du plan P et de la droite d:

Soit: **" B le point d'intersection du plan P et de la droite d. "**

Une représentation paramétrique de la droite d est:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t + 9 \\ z = t - 3 \end{cases}, t \in IR.$$

Soit **B** $(x_B ; y_B ; z_B)$, un point appartenant à la droite d.

B appartient aussi au plan P ssi ses coordonnées vérifient:

$$2x - 2y + z + 1 = 0.$$

D'où: $2x_B - 2y_B + z_B + 1 = 0 \iff 2(2t + 1) - 2(-2t + 9) + (t - 3) + 1 = 0$

$$\text{cad: } t = \frac{18}{9} = 2.$$

Dans ces conditions, les coordonnées du point B sont:

$$\begin{cases} x_B = 2 \times 2 + 1 = \mathbf{5} \\ y_B = -2 \times 2 + 9 = \mathbf{5} \\ z_B = 2 - 3 = \mathbf{-1} \end{cases}.$$

Au total, les coordonnées du point B sont bien: $(5 ; 5 ; -1)$.

3. a. Montrons que le point C (7 ; 3 ; -9) appartient au plan P:

Le point C (7 ; 3 ; -9) appartient au plan P ssi ses coordonnées vérifient l'équation: $2x - 2y + z + 1 = 0$.

Or: $2 \times (7) - 2 \times (3) + 1 \times (-9) + 1 = 14 - 6 - 9 + 1$

$$= 0.$$

Ainsi: le point C appartient bien au plan P.

3. b. Montrons que le triangle ABC est rectangle isocèle en A:

Le triangle ABC est rectangle isocèle en A ssi deux choses:

- il est rectangle en A: $BC^2 = AB^2 + AC^2$,

• ses deux côtés AB et AC sont de même longueur: $AB = AC$.

Or ici: • $AB = \sqrt{(5-3)^2 + (5-1)^2 + (-1-(-5))^2} = 6$,

• $AC = \sqrt{(7-3)^2 + (3-1)^2 + (-9-(-5))^2} = 6$,

• $BC = \sqrt{(7-5)^2 + (3-5)^2 + (-9-(-1))^2} = \sqrt{72}$.

Donc: • $AB = AC = 6$

• $BC^2 = AB^2 + AC^2$ car: $(\sqrt{72})^2 = 6^2 + 6^2$.

Ainsi: le triangle ABC est bien rectangle isocèle en A.

4. a. Justifions que le triangle ABM est rectangle:

Les points M et B appartiennent à la droite d.

Cette dernière est orthogonale au plan P et par conséquent à toutes les droites de ce plan.

Donc la droite (MB) est orthogonale à la droite (AB) (qui appartient à P).

Ainsi: le triangle ABM est bien rectangle en B.

4. b. Montrons que le triangle ABM est isocèle en B ssi $t^2 - 4t = 0$:

Le triangle ABM est rectangle isocèle en B ssi deux choses:

• il est rectangle en B: $AM^2 = AB^2 + BM^2$,

• ses deux côtés AB et BM sont de même longueur: $AB = BM$.

Or ici: • le triangle ABM est rectangle en B, d'après question précédente,

• $AB = 6$,

- $BM = \sqrt{[(2t+1)-5]^2 + [(-2t+9)-5]^2 + [(t-3)+1]^2}$

$$= \sqrt{(2t-4)^2 + (-2t+4)^2 + (t-2)^2}$$

$$= \sqrt{9(t-2)^2}$$

$$= 3(t-2).$$ (avec: $t \neq 2$, d'après l'énoncé)

Donc, le triangle rectangle ABM est isocèle en B ssi:

$$AB = BM \iff 6 = 3(t-2)$$

$$\iff 2 = t - 2$$

$$\iff t - 4 = 0 \quad \text{ou:} \quad t^2 - 4t = 0.$$

Au total: le triangle ABM est bien isocèle en B ssi $t^2 - 4t = 0$.

4. c. Déduisons-en les coordonnées des points M_1 et M_2:

Nous savons que le triangle ABM est isocèle en B ssi: $t^2 - 4t = 0$.

Or: $t^2 - 4t = 0 \iff t(t-4) = 0 \iff t = 0$ ou $t = 4$.

Dans ces conditions, nous avons deux points " M ": M_1 et M_2.

En effet:
- Quand $t = 0$: $M_1(1; 9; -3)$;
- Quand $t = 4$: $M_2(9; 1; 1)$.

En conclusion, les coordonnées des points M_1 et M_2 de la droite d tels que les triangles rectangles ABM_1 et ABM_2 soient isocèles en B sont:

$$M_1(1; 9; -3) \text{ et } M_2(9; 1; 1).$$