Sujet Spécialité

MATHÉMATIQUES

LIBAN

BAC S - 2018

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU MARDI 29 MAI 2018

MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Spécialité Coefficient : 9

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 5 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On définit la suite de réels (a_n) par :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{pour } n \geqslant 1. \end{cases}$$

On appelle cette suite la **suite de Fibonacci**.

1. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'à la fin de son exécution la variable A contienne le terme a_n.

```
A ← 0
B ← 1
Pour i allant de 2 à n :
 | C ← A + B
 | A ← ...
 | B ← ...
Fin Pour
```

On obtient ainsi les premières valeurs de la suite a_n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2, A^3 et A^4. Vérifier que $A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

3. On peut démontrer, et nous admettrons, que pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

a) Soit p et q deux entiers naturels non nuls. Calculer le produit $A^p \times A^q$ et en déduire que

$$a_{p+q} = a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q.$$

b) En déduire que si un entier r divise les entiers a_p et a_q, alors r divise également a_{p+q}.

c) Soit p un entier naturel non nul.
Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n non nul, a_p divise a_{np}.

4.a) Soit n un entier supérieur ou égal à 5. Montrer que si n est un entier naturel qui n'est pas premier, alors a_n n'est pas un nombre premier.

b) On peut calculer $a_{19} = 4\,181 = 37 \times 113$.
Que penser de la réciproque de la propriété obtenue dans la question **4. a)** ?

EXERCICE 5

[Liban 2018]

1. Recopions et complétons l'algorithme:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

1	$A \leftarrow 0$
2	$B \leftarrow 1$
3	Pour i allant de 1 à n
4	$\quad C \leftarrow A + B$
5	$\quad A \leftarrow B$
6	$\quad B \leftarrow C$
7	Fin Pour

2. a. Calculons A^2, A^3 et A^4:

• $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

- $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- $A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. b. Vérifions que $A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$:

$$A^5 = A^4 \times A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. a. a1. Calculons $A^p \times A^q$:

$$A^p \times A^q = \begin{pmatrix} a_{p+1} & a_p \\ a_p & a_{p-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{q+1} & a_q \\ a_q & a_{q-1} \end{pmatrix}, \text{ pour tous entiers } p \text{ et } q \text{ non nuls}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{p+1} \times a_{q+1} + a_p \times a_q & a_{p+1} \times a_q + a_p \times a_{q-1} \\ a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q & a_p \times a_q + a_{p-1} \times a_{q-1} \end{pmatrix}.$$

3. a. a2. Déduisons-en que $a_{p+q} = a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q$:

Nous savons que: $A^p \times A^q = \begin{pmatrix} a_{p+1} \times a_{q+1} + a_p \times a_q & a_{p+1} \times a_q + a_p \times a_{q-1} \\ a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q & a_p \times a_q + a_{p-1} \times a_{q-1} \end{pmatrix}$.

De plus, nous avons: $A^p \times A^q = A^{(p+q)}$

cad: $A^p \times A^q = \begin{pmatrix} a_{p+q+1} & a_{p+q} \\ a_{p+q} & a_{p+q-1} \end{pmatrix}$.

Par identification, on obtient: $a_{p+q} = a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q$.

Au total, pour tous entiers p et q non nuls, nous avons bien:

$$a_{p+q} = a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q.$$

3. b. Déduisons-en que si un entier non nul Γ divise les entiers a_p et a_q, alors Γ divise également a_{p+q}:

- Si Γ divise l'entier a_p, nous pouvons alors écrire: $a_p = x \cdot \Gamma$, $x \in \mathbb{N}$.
- Si Γ divise l'entier a_q, nous pouvons alors écrire: $a_q = y \cdot \Gamma$, $y \in \mathbb{N}$.

Dans ces conditions:
$$\begin{aligned} a_{p+q} &= a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q \\ &= (x \cdot \Gamma) \times a_{q+1} + a_{p-1} \times (y \cdot \Gamma) \\ &= \Gamma \times [\, x \times a_{q+1} + y \times a_{p-1} \,] \\ &= \Gamma \times [\, \text{Liban} \,], \text{ avec: } \text{Liban} = x \times a_{q+1} + y \times a_{p-1}. \end{aligned}$$

Or: Liban est un entier naturel.

D'où: si un entier naturel non nul Γ divise les entiers naturels a_p et a_q, alors il divise bien l'entier naturel a_{p+q} car $a_{p+q} = \Gamma \times [\, \text{Liban} \,]$, Liban $\in \mathbb{N}$.

3. c. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_p divise a_{np}:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel non nul n: a_p divise a_{np} ".

Initialisation: • Quand $n = 1$: $a_p = a_p$ et $a_{np} = a_p$.

• Donc a_p divise bien a_{np} car: $a_p = 1 \times a_p$, $1 \in \mathbb{N}$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que a_p divise a_{np} et montrons qu'alors: a_p divise $a_{(n+1)p}$.

Supposons: a_p divise a_{np}, pour un entier naturel non nul n fixé.
(1)

$$(1) \Rightarrow a_{np} = z \cdot a_p,\ z \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a_{(n+1)p} = a_{np+p}$$

$$= a_{np} \times a_{p+1} + a_{np-1} \times a_p,$$ **d'après la relation mise en évidence à la question 3. b.**

$$\Rightarrow a_{(n+1)p} = z \cdot a_p \times a_{p+1} + a_{np-1} \times a_p$$

$$\Rightarrow a_{(n+1)p} = a_p \times [\, z \times a_{p+1} + a_{np-1} \,] \quad (2).$$

Or: $[\, z \times a_{p+1} + a_{np-1} \,]$ est un entier naturel car z, a_{p+1} et a_{np-1} sont des entiers naturels.

D'où: $(2) \Rightarrow a_{(n+1)p} = w \cdot a_p$, $w \in \mathbb{N}$. **(a_p divise $a_{(n+1)p}$)**

Conclusion: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_p divise a_{np}.

4. Que penser de la réciproque de la propriété démontrée à la question précédente ?

Notons que la réciproque s'écrit: " Soit n un entier supérieur ou égal à 5. Si a_n n'est pas un nombre premier, alors n est un entier naturel qui n'est pas premier ".

Or ici:
- $a_{19} = 4181 = 37 \times 113$,
- $19 \geqslant 5$,
- a_{19} n'est pas un nombre premier,
- **19 est un entier naturel qui est premier !**

Donc: la réciproque est fausse !