Corrigé

Exercice 2

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU MARDI 29 MAI 2018

MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Spécialité **Coefficient : 9**

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 2 (3 points)

Commun à tous les candidats

1. Donner les formes exponentielle et trigonométrique des nombres complexes $1 + \mathrm{i}$ et $1 - \mathrm{i}$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = (1 + \mathrm{i})^n + (1 - \mathrm{i})^n$.

   a) Déterminer la forme trigonométrique de S_n.

   b) *Pour chacune des deux affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.*

   Affirmation A : Pour tout entier naturel n, le nombre complexe S_n est un nombre réel.

   Affirmation B : Il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $S_n = 0$.

EXERCICE 2

[Liban 2018]

1\. a. Donnons les formes exponentielle et trigonométrique de $1 + i$:

- Le module de $1 + i$ est: $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2}$ => $|1 + i| = \sqrt{2}$.

- Soit θ, l'argument de $1 + i$:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Par identification:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Au total: • Sous forme trigonométrique $1 + i$ s'écrit:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

- Sous forme exponentielle $1 + i$ s'écrit: $1 + i = \sqrt{2} \times e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$.

1\. b. Donnons les formes exponentielle et trigonométrique $1 - i$:

- Le module de $1 - i$ est: $|1 - i| = \sqrt{1^2 + 1^2}$ => $|1 - i| = \sqrt{2}$.

• Soit θ, l'argument de $1 - i$:

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Par identification:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \ \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Au total: • Sous forme trigonométrique $1 - i$ s'écrit:

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

• Sous forme exponentielle $1 - i$ s'écrit: $1 - i = \sqrt{2} \times e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

2. a. Déterminons la forme trigonométrique de S_n:

D'après Moivre, nous pouvons écrire:

• $(1 + i)^n = (\sqrt{2})^n \times \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right);$

• $(1 - i)^n = (\sqrt{2})^n \times \left(\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right).$

Or: $\cos(-x) = x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.

D'où: $S_n = (1 + i)^n + (1 - i)^n$

$$= (\sqrt{2})^n\left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]$$

$$= (\sqrt{2})^n \left[2 \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right]$$

$$= 2 \times (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \quad \text{ou:} \quad (\sqrt{2})^{(n-2)} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Au total, la forme trigonométrique de S_n est: $S_n = (\sqrt{2})^{(n-2)} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

2. b. • **AFFIRMATION A**: **Vraie**.

En effet: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\sqrt{2})^{(n-2)} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ est toujours un réel.

(S_n ne contient pas de " i ")

• **AFFIRMATION B**: **Vraie**.

En effet: à chaque fois que $\frac{n\pi}{4} = \frac{(2+4k)\pi}{4}$, $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

et pour tout entier naturel k, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$.