Corrigé

Exercice 1

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU MARDI 29 MAI 2018

MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Spécialité Coefficient : 9

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 1 (3 points)

Commun à tous les candidats

Les quinze jours précédant la rentrée universitaire, le standard téléphonique d'une mutuelle étudiante enregistre un nombre record d'appels.
Les appelants sont d'abord mis en attente et entendent une musique d'ambiance et un message préenregistré.
Lors de cette première phase, le temps d'attente, exprimé en secondes, est modélisé par la variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,02\ \text{s}^{-1}$.
Les appelants sont ensuite mis en relation avec un chargé de clientèle qui répond à leurs questions. Le temps d'échange, exprimé en secondes, lors de cette deuxième phase est modélisé par la variable aléatoire Y, exprimée en secondes, qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 96$ s et d'écart-type $\sigma = 26$ s.

1. Quelle est la durée totale moyenne d'un appel au standard téléphonique (temps d'attente et temps d'échange avec le chargé de clientèle) ?
2. Un étudiant est choisi au hasard parmi les appelants du standard téléphonique.
   a) Calculer la probabilité que l'étudiant soit mis en attente plus de 2 minutes.
   b) Calculer la probabilité pour que le temps d'échange avec le conseiller soit inférieur à 90 secondes.
3. Une étudiante, choisie au hasard parmi les appelants, attend depuis plus d'une minute d'être mise en relation avec le service clientèle. Lasse, elle raccroche et recompose le numéro. Elle espère attendre moins de trente secondes cette fois-ci.
   Le fait de raccrocher puis de rappeler augmente-t-il ses chances de limiter à 30 secondes l'attente supplémentaire ou bien aurait-elle mieux fait de rester en ligne ?

EXERCICE 1

[Liban 2018]

1. Déterminons la durée totale moyenne d'un appel au standard:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X suit la loi exponentielle de paramètre: $\lambda = 0,02\ s^{-1}$.
- Y suit la loi normale d'espérance $\mu = 96$ s et d'écart type $\sigma = 26$ s.
- T suit la loi normale centrée réduite.

- **Temps moyen d'attente lors de la première phase:**

E (X) correspond au " **temps moyen d'attente** ".

Or, dans le cas d'une loi exponentielle de paramètre λ: $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

D'où ici: $E(X) = \dfrac{1}{0,02} \Rightarrow E(X) = 50$ secondes.

- **Temps moyen d'attente lors de la seconde phase:**

E (Y) correspond au " **temps moyen d'attente** ".

Or, dans le cas d'une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ: $E(Y) = \mu$.

D'où ici: $E(Y) = 96$ secondes.

Ainsi, la durée totale moyenne d'un appel au standard est de:

$$E(X) + E(Y) = 146 \text{ secondes}.$$

2. a. Calculons la probabilité pour que l'étudiant soit mis en attente plus de 2 minutes:

Il s'agit de calculer: $P(X \geqslant 120)$, car: 2 minutes = 120 secondes.

$$P(X \geqslant 120) = 1 - P(X \leqslant 120)$$

$$= 1 - \int_0^{120} f(x)\, dx$$

$$= 1 - \int_0^{120} 0,02 \times e^{-0,02x}\, dx$$

$$= 1 - [-e^{-0,02x}]_0^{120}$$

$$= e^{-2,4} \approx 0,091.$$

Au total, la probabilité pour que l'étudiant soit mis en attente plus de 2 minutes est d'environ: 9,1%.

2. b. Calculons la probabilité pour que le temps d'échange avec le conseiller soit inférieure à 90 secondes:

Il s'agit de calculer: $P(Y \leqslant 90)$.

$$P(Y \leqslant 90) = P\left(\frac{Y - \mu}{\sigma} \leqslant \frac{90 - 96}{26}\right)$$

$$= P\left(T \leqslant -\frac{3}{13}\right)$$

$$= 1 - P\left(T \leqslant \frac{3}{13}\right).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(Y \leqslant 90) \approx 0,409.$$

Au total, la probabilité pour que le temps d'échange avec le conseiller soit inférieure à 90 secondes est d'environ: 40, 9%.

3. Les chances de l'étudiante augmentent-elles ?

Pour répondre à cette question, nous devons calculer: $P_{(X \geqslant 60)}(X \leqslant 60 + 30)$.

Or: $P_{(X \geqslant 60)}(X \leqslant 60 + 30) = P(X \leqslant 30)$, car la loi exponentielle est une loi de durée sans vieillissement.

Ainsi: $P_{(X \geqslant 60)}(X \leqslant 60 + 30) = P(X \leqslant 30)$,

et donc: **le fait de raccrocher ne change rien à son attente totale**.

Au total: les chances de l'étudiante n'augmentent pas, elles restent inchangées.