Sujet Obligatoire

MATHÉMATIQUES

LIBAN

BAC S - 2018

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU MARDI 29 MAI 2018

MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Obligatoire Coefficient : 7

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

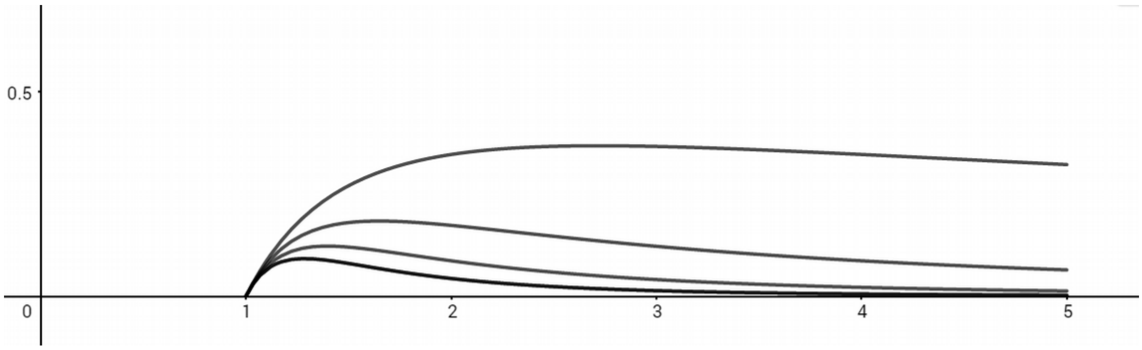
EXERCICE 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[1\,;\,5]$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n}.$$

Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathscr{C}_n$ pour n appartenant à $\{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\}$.



1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$:

$$f_n'(x) = \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}.$$

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1\,;\,5]$.
On note A_n le point de la courbe $\mathscr{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.
Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation

$$y = \frac{1}{e}\ln(x).$$

3.a) Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$:

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}.$$

b) Montrer que pour tout entier $n > 1$:

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right).$$

c) Pour tout entier $n > 0$, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, sous la courbe $\mathscr{C}_n$, c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe $\mathscr{C}_n$.
Déterminer la valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4

[Liban 2018]

1. Montrons que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel $x \in [\ 1 ; 5\ ]$, $f_n'(x) = \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$:

Ici: • $f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n}$ $\left(\frac{u}{v}\right)$

• $Df = [\ 1 ; 5\ ]$.

Posons: $f_n = \frac{f_1}{f_2}$, avec: $f_1(x) = \ln(x)$ et $f_2(x) = x^n$.

f_1 est dérivable sur $]\ 0 ; +\infty\ [$ comme fonction " ln ", donc dérivable sur l'intervalle $[\ 1 ; 5\ ]$.

f_2 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle $[\ 1 ; 5\ ]$.

Par conséquent, f_n est dérivable sur $[\ 1 ; 5\ ]$ comme quotient $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)$ de deux fonctions dérivables sur $[\ 1 ; 5\ ]$, avec: pour tout $x \in [\ 1 ; 5\ ]$, $f_2(x) \neq 0$.

Ainsi, nous pouvons calculer f_n' pour tout $x \in [\ 1 ; 5\ ]$.

Pour tout $x \in [\ 1 ; 5\ ]$:

$$f_n'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right) \times (x^n) - (\ln(x)) \times (n\, x^{n-1})}{(x^n)^2} \qquad \left(\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}\right)$$

$$= \frac{x^{n-1} - n\, x^{n-1} \ln(x)}{x^{2n}}$$

$$= \frac{x^{n-1}\,(1 - n\ln(x))}{x^{2n}}$$

$$= \frac{x^{-1}\,(1 - n\ln(x))}{x^{n}}$$

$$= \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}.$$

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [\,1\,;5\,]$: $f_n'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}.$

2. **Montrons que tous les points A_n appartiennent à une même courbe d'équation $y = \dfrac{1}{e}\ln(x)$:**

D'après l'énoncé: " **on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[\,1\,;5\,]$** ".

Soit $A_n\,(x_n\,;y_n)$, le maximum de la fonction f_n sur $[\,1\,;5\,]$.

L'abscisse x_n vérifie donc: $f_n'(x_n) = 0$.

$$f_n'(x_n) = 0 \iff \frac{1 - n\ln(x_n)}{x_n^{\,n+1}} = 0$$

$\iff 1 - n\ln(x_n) = 0$, car: sur $[\,1\,;5\,]$, $x_n^{\,n+1} \neq 0$

$\iff x_n = e^{\frac{1}{n}}$.

Dans ces conditions, les coordonnées du point A_n sont respectivement:

$$x_n = e^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad y_n = f(x_n) = \frac{\ln(x_n)}{x_n^{\,n}},$$

ou: $$x_n = e^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{\frac{1}{n}}{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n}} = \frac{1}{n \times e}.$$

Or: $\dfrac{1}{n \times e} = \dfrac{1}{e} \times \dfrac{1}{n}$

$= \dfrac{1}{e} \times \ln\left(e^{\frac{1}{n}}\right)$

$= \dfrac{1}{e} \times \ln(x_n)$.

D'où, nous avons: $y_n = \dfrac{1}{e} \times \ln(x_n)$, pour tout $x \in [\,1\,; 5\,]$.

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [\,1\,; 5\,]$, tous les points A_n appartiennent à une même courbe d'équation: $y_n = \dfrac{1}{e} \ln(x_n)$.

3. a. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [\,1\,; 5\,]$, $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \dfrac{\ln(5)}{x^n}$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [\,1; 5\,]$, nous avons:

$1 \leqslant x \leqslant 5$

$\Longleftrightarrow \ln(1) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(5)$

$\Longleftrightarrow 0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(5)$

$\Longleftrightarrow \dfrac{0}{x^n} \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \dfrac{\ln(5)}{x^n}$, avec: **pour tout $x \in [\,1\,; 5\,]$, $x^n > 0$**

$\Longleftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \dfrac{\ln(5)}{x^n}$.

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [\,1\,; 5\,]$: $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \dfrac{\ln(5)}{x^n}$.

3. b. Montrons l'égalité demandée pour tout entier $n > 1$:

f_n est continue sur $[\,1\,; 5\,]$, elle admet donc des primitives sur $[\,1\,; 5\,]$ et par conséquent: $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx$ existe.

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx = \int_1^5 x^{-n}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{1-n} x^{1-n} \right]_1^5$$

$$= \frac{1}{1-n}\left(5^{1-n} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(1 - 5^{1-n}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right).$$

Au total, pour tout entier $n > 1$ et $x \in [\,1\,;5\,]$: $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right).$

3. c. Déterminons la valeur limite de l'aire demandée quand n tend vers +∞:

L'aire, exprimée en unités d'aire, sous la courbe $\mathcal{C}_n$ cad l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}_n$ correspond à: $\displaystyle\int_1^5 f_n(x)\,dx.$

Or: $\displaystyle\int_1^5 f_n(x)\,dx = \int_1^5 \frac{\ln(x)}{x^n}\,dx,$

et d'après la question **3. b.**: $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \dfrac{\ln(5)}{x^n}.$

Posons pour tout $x \in [\,1\,;5\,]$: • $f_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n},$

- $g_1(x) = 0$,
- $g_2(x) = \dfrac{\ln(5)}{x^n}$.

Notons que: • les fonctions f_n, g_1 et g_2 sont continues sur $[1;5]$;

- elles admettent donc des primitives sur $[1;5]$, et par conséquent:

$$\int_1^5 f_n(x)\,dx,\ \int_1^5 g_1(x)\,dx \text{ et } \int_1^5 g_2(x)\,dx \text{ existent};$$

- de plus, les fonctions f_n, g_1 et g_2 sont positives sur $[1;5]$;
- enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies, nous pouvons écrire:

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}$$

$$\iff g_1(x) \leqslant f_n(x) \leqslant g_2(x)$$

$$\iff \int_1^5 g_1(x)\,dx \leqslant \int_1^5 f_n(x)\,dx \leqslant \int_1^5 g_2(x)\,dx$$

$$\iff 0 \leqslant \int_1^5 f_n(x)\,dx \leqslant \ln(5)\left[\frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)\right]$$, d'après question 3. b.

$$\iff 0 \leqslant \int_1^5 f_n(x)\,dx \leqslant \frac{\ln(5)}{n-1} - \frac{\ln(5)}{(n-1)(5^{n-1})}.$$

Or quand n tend vers $+\infty$: • $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$ (terme de gauche)

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{\ln(5)}{n-1} - \dfrac{\ln(5)}{(n-1)(5^{n-1})}\right) = 0$ (terme de droite).

D'où, d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^5 f_n(x)\,dx = 0.$$

Au total, la valeur limite de l'aire demandée quand n tend vers $+\infty$ est:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^5 f_n(x)\,dx = 0.$$