Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU MARDI 29 MAI 2018

MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Obligatoire Coefficient : 7

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

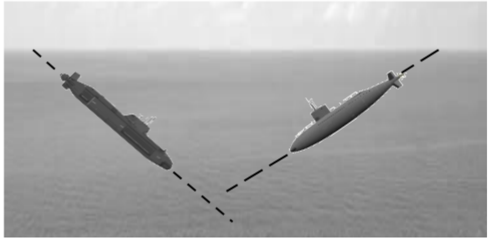
Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

L'objectif de cet exercice est d'étudier les trajectoires de deux sous-marins en phase de plongée.
On considère que ces sous-marins se déplacent en ligne droite, chacun à vitesse constante.
À chaque instant t, exprimé en minutes, le premier sous-marin est repéré par le point $S_1(t)$ et le second sous-marin est repéré par le point $S_2(t)$ dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$ dont l'unité est le mètre.



Le plan défini par $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j}\right)$ représente la surface de la mer. La cote z est nulle au niveau de la mer, négative sous l'eau.

1. On admet que, pour tout réel $t \geqslant 0$, le point $S_1(t)$ a pour coordonnées :

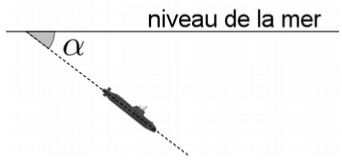
$$\begin{cases} x(t) = 140 - 60t \\ y(t) = 105 - 90t \\ z(t) = -170 - 30t \end{cases}.$$

a) Donner les coordonnées du sous-marin au début de l'observation.

b) Quelle est la vitesse du sous-marin ?

2. On se place dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin.

Déterminer l'angle α que forme la trajectoire du sous-marin avec le plan horizontal.
On donnera l'arrondi de α à 0,1 degré près.



3. Au début de l'observation, le second sous-marin est situé au point $S_2(0)$ de coordonnées $(68\,;\,135\,;\,-68)$ et atteint au bout de trois minutes le point $S_2(3)$ de coordonnées $(-202\,;\,-405\,;\,-248)$ avec une vitesse constante.
À quel instant t, exprimé en minutes, les deux sous-marins sont-ils à la même profondeur ?

EXERCICE 3

[Liban 2018]

1. a. Donnons les coordonnées du sous-marin au début de l'observation:

D'après l'énoncé: $\begin{cases} x(t) = 140 - 60t \\ y(t) = 105 - 90t \\ z(t) = -170 - 30t \end{cases}$, $t \geq 0$.

Au début de l'observation $\mathbf{t = 0}$.

Dans ces conditions: $\begin{cases} x(0) = 140 \text{ m} \\ y(0) = 105 \text{ m} \\ z(0) = -170 \text{ m} \end{cases}$.

Au total, les coordonnées du sous-marin au début de l'observation sont:

$x(0) = 140$ mètres, $y(0) = 105$ mètres et $z(0) = -170$ mètres.

1. b. Déterminons la vitesse du sous-marin:

Le sous-marin 1 se déplace à vitesse constante.

Il passe ainsi de $t = 0$ à $t = 1$, en 1 minute, d'après l'énoncé.

Soient les points $S_1(0)$ et $S_1(1)$.

Les coordonnées respectives de $S_1(0)$ et $S_1(1)$ sont:

$$S_1(0)\begin{pmatrix} 140 \\ 105 \\ -170 \end{pmatrix} \text{ et } S_1(1)\begin{pmatrix} 140 - 60 \times 1 \\ 105 - 90 \times 1 \\ -170 - 30 \times 1 \end{pmatrix} \text{ cad: } S_1(1)\begin{pmatrix} 80 \\ 15 \\ -200 \end{pmatrix}.$$

Ainsi la distance parcourue en 1 minute est de:

$$S_1(0)\,S_1(1) = \sqrt{(80-140)^2 + (15-105)^2 + (-200+170)^2}$$

$$= 30\sqrt{14} \text{ mètres.}$$

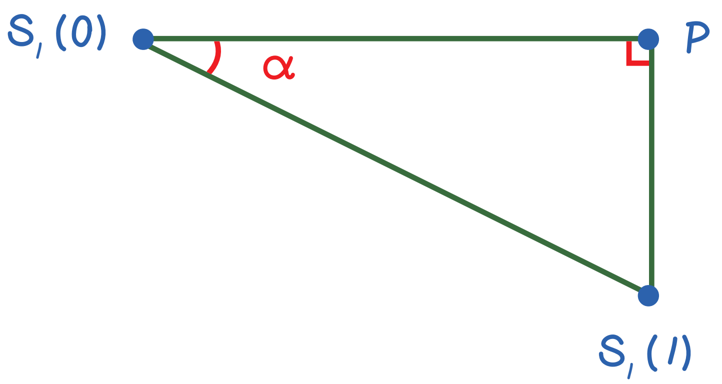
D'où la vitesse du sous-marin 1 est:

$$V = \frac{S_1(0)\,S_1(1)}{1} \quad \text{cad:} \quad V = 30\sqrt{14} \text{ mètres/minute.}$$

Au total, la vitesse demandée est: $V = 30\sqrt{14}$ mètres/minute.

1. c. Déterminons l'angle α à 10^{-1} près:

Soit la représentation graphique simplifiée suivante:



(triangle rectangle en P)

Nous avons: $\sin\alpha = \dfrac{S_1(1)\,P}{S_1(0)\,S_1(1)}$.

Or:
- $S_1(1)$ a pour coordonnées $(80\,;\,15\,;\,-200)$,
- $S_1(0)\,S_1(1) = 30\sqrt{14}$.

Et: $P(80\,;\,15\,;\,-170)$, car: $x_P = x_{S_1(1)}$, $y_P = y_{S_1(1)}$ et $z_P = z_{S_1(0)}$.

D'où: $S_1(1)\,P = \sqrt{(80-80)^2 + (15-15)^2 + (-170+200)^2}$

$= 30.$

Et par conséquent: $\sin\alpha = \dfrac{30}{30\sqrt{14}}$ **cad**: $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{14}}.$

Au total et à l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons comme angle α:

$$\alpha \approx 15,5 \text{ degrés à } 10^{-1} \text{ près.}$$

2. Déterminons à quel instant t, les deux sous-marins sont à la même profondeur:

Les deux sous-marins sont à la même profondeur quand: $z_1(t) = z_2(t)$.

Or: $z_1(t) = -170 - 30t$, d'après l'énoncé.

Reste à déterminer $z_2(t)$.

D'après l'énoncé: $z_2(0) = -68$ et $z_2(3) = -248$.

Or: $z_2(t) = a + b \times t$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Ainsi, nous avons le système:

$$\begin{cases} z_2(0) = a + b \times 0 \\ z_2(3) = a + b \times 3 \end{cases} \iff \begin{cases} -68 = a \\ -248 = a + 3b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -68 \\ b = -60 \end{cases}.$$

D'où: $z_2(t) = -68 - 60t$, $t \in \mathbb{R}$.

Dans ces conditions: $z_1(t) = z_2(t) \iff -170 - 30t = -68 - 60t$

$\Rightarrow$ **$t = 3,4$ minutes.**

Ainsi: les deux sous-marins seront à la même profondeur au bout de 3, 4 minutes, **soit 3 minutes et 24 secondes**.