Corrigé

Exercice 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

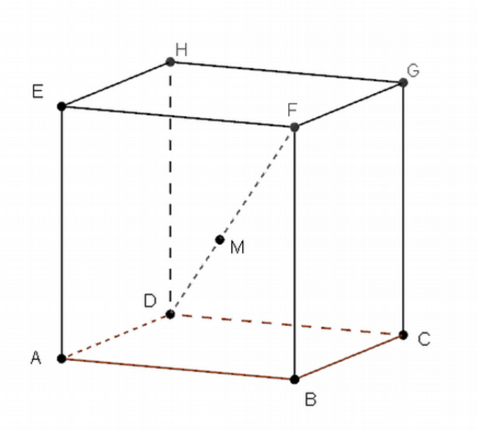
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7 dont une annexe en page 7/7 qui est à rendre avec la copie.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1 (6 points)

Commun à tous les candidats



On considère un cube $ABCDEFGH$ dont la représentation en perspective cavalière est donnée ci-contre.
Les arêtes sont de longueur 1.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(D\,;\,\overrightarrow{DA}\,,\overrightarrow{DC}\,,\overrightarrow{DH}\right)$.

Partie A

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBG).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).
3. En déduire les coordonnées du point I intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).
   On démontrerait de la même manière que le point J intersection de la droite (DF) et du plan (AHC) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

Partie B

À tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$, on associe le point M du segment $[DF]$ tel que $\overrightarrow{DM} = x\,\overrightarrow{DF}$. On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle $\widehat{EMB}$ lorsque le point M parcourt le segment $[DF]$. On a $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

1. Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D ? avec le point F ?

2.a) Justifier que les coordonnées du point M sont $(x\,;x\,;x)$.

b) Montrer que $\cos(\theta) = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$. On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MB}$.

3. On a construit ci-dessous le tableau de variations de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$.

x	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		1
Variations de f	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0

Pour quelles positions du point M sur le segment $[DF]$:

a) le triangle MEB est-il rectangle en M ?

b) l'angle θ est-il maximal ?

EXERCICE 1

[Liban 2017]

Partie A:

1. Montrons que $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBG):

Dans le repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DH})$, les coordonnées des points D, A, C, H et F sont:

- $D\ (0; 0; 0)$;
- $A\ (1; 0; 0)$;
- $C\ (0; 1; 0)$;
- $H\ (0; 0; 1)$;
- $F\ (1; 1; 1)$ car: $\overrightarrow{DF} = 1 \times \overrightarrow{DA} + 1 \times \overrightarrow{AB} + 1 \times \overrightarrow{BF}$

$$= 1 \times \overrightarrow{DA} + 1 \times \overrightarrow{DC} + 1 \times \overrightarrow{DH}.$$

D'après le cours, un vecteur $\vec{n}\ (a; b; c)$ est normal à un plan P ssi: ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.

Ici:
- Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ du plan P sont non colinéaires.
- $B\ (1; 1; 0)$
- $E\ (1; 0; 1)$
- $G\ (0; 1; 1)$.
- $\overrightarrow{BE}\ (0; -1; 1)$ et $\overrightarrow{BG}\ (-1; 0; 1)$.

Dans ces conditions, $\vec{n} = \overrightarrow{DF}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ car:

- $(1 \times 0) + (1 \times (-1)) + (1 \times 1) = 0$
- $(1 \times (-1)) + (1 \times 0) + (1 \times 1) = 0$

, **avec**: $\overrightarrow{DF}\ (1\,;\,1\,;\,1)$.

En conclusion: $\overrightarrow{DF}$ est bien normal au plan (EBG).

2. Déterminons une équation cartésienne du plan (EBG):

Ici: • $\vec{n}\ (a = 1\,;\, b = 1\,;\, c = 1)$;

• E est un point de l'espace, avec $E\ (1\,;\,0\,;\,1)$.

D'où, une équation cartésienne du plan (EBG) passant par E et de vecteur normal $\vec{n}$ est: $a\,(x - x_E) + b\,(y - y_E) + c\,(z - z_E) = 0$

$\iff 1 \times (x - 1) + 1 \times (y - 0) + 1\,(z - 1) = 0$

$\Rightarrow x + y + z = 2.$

En conclusion, une équation cartésienne du plan (EBG) est: $x + y + z = 2$.

3. Déduisons-en les coordonnées du point I:

Le point I est le point d'intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).

La droite (DF) a pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_D + 1 \times t \\ y = y_D + 1 \times t \\ z = z_D + 1 \times t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Soit $I\ (x_I\,;\,y_I\,;\,z_I)$, un point appartenant à la droite (DF).

I appartient aussi au plan (EBG) ssi ses coordonnées vérifient: $x + y + z = 2$.

$x_I + y_I + z_I = 2 \iff t + t + t = 2 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$.

Dans ces conditions, les coordonnées du point I sont:

$$\begin{cases} x_I = \frac{2}{3} \\ y_I = \frac{2}{3} \\ z_I = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Au total, la droite (DF) coupe le plan (EBG) au point: $I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Partie B:

1. a. " θ " si M = D ?

D'après le cours, nous savons que l'angle θ entre 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est

tel que: $\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\,.\,||\vec{v}||}$.

Si M = D, nous devons alors calculer l'angle $\widehat{EDB}$.

Or: • $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, car E (1; 0; 1),

• $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, car B (1; 1; 0).

D'où: • $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DB} = (1 \times 1) + (0 \times 1) + (1 \times 0) \Rightarrow \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DB} = 1$,

• $||\overrightarrow{DE}|| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \Rightarrow ||\overrightarrow{DE}|| = \sqrt{2}$,

• $||\overrightarrow{DB}|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \Rightarrow ||\overrightarrow{DB}|| = \sqrt{2}$.

Ainsi: $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$ => $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ => $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

1. b. " θ " si M = F ?

Si M = F, nous devons calculer l'angle $\widehat{EFB}$.

Or là, nous sommes en présence d'un angle droit.

D'où: $\cos\theta = 0$ => $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Au total: $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ (quand M = D) et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (quand M = F).

2. a. Justifions que les coordonnées du point M sont $(x\,;\,x\,;\,x)$:

D'après 3. Partie A, le point I d'intersection de la droite (DF) et du plan (EBG) est tel que:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases},\ t \in \mathbb{R},\ \text{et:}\quad x + y + z = 2.$$

Donc ici, nous pouvons affirmer que: $x = y = z = t,\ t \in \mathbb{R}$.

Ainsi, les coordonnées du point M sont bien: $(x\,;\,x\,;\,x)$, avec $x \in [\,0\,;\,1\,]$.

2. b. Déterminons cos (θ) en fonction de x:

Nous devons calculer cos (θ), θ étant l'angle $\widehat{EMB}$.

Or: • $\overrightarrow{ME}\begin{pmatrix} 1-x \\ 0-y \\ 1-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ -y \\ 1-z \end{pmatrix}$,

• $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} 1-x \\ 1-y \\ 0-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-y \\ -z \end{pmatrix}$.

D'où: • $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MB} = [(1-x)(1-x)] + [(-y)(1-y)] + [(1-z)(-z)]$

$$\Rightarrow \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MB} = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z + 1,$$

• $||\overrightarrow{ME}|| = \sqrt{(1-x)^2 + (-y)^2 + (1-z)^2}$

$$\Rightarrow ||\overrightarrow{ME}|| = \sqrt{(1-x)^2 + y^2 + (1-z)^2},$$

• $||\overrightarrow{MB}|| = \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2 + (-z)^2}$

$$\Rightarrow ||\overrightarrow{MB}|| = \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2 + z^2}.$$

Or: $x = y = z$, d'après la question précédente.

Dans ces conditions: • $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MB} = 3x^2 - 4x + 1$,

• $||\overrightarrow{ME}|| = \sqrt{2(1-x)^2 + x^2}$,

• $||\overrightarrow{MB}|| = \sqrt{2(1-x)^2 + x^2}$.

Ainsi: $\cos(\theta) = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{2(1-x)^2 + x^2} \iff \cos(\theta) = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}$.

Au total, nous avons bien: $\cos(\theta) = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}$.

3. a. Le triangle MEB est-il rectangle en M ?

Le triangle MEB est rectangle en M ssi: $\cos(\theta) = 0$.

$$\cos(\theta) = 0 \iff \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2} = 0$$

$$\iff 3x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (1).$$

Or, d'après le tableau de variations, l'équation (1) est vérifiée quand:

$$x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = 1.$$

• quand $x = \frac{1}{3}$: M correspond au point $J\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

• quand $x = 1$: M correspond au point $F(1; 1; 1)$.

Au total, le triangle MEB est rectangle en M dans deux cas:

• si $M = J$,

• si $M = F$.

3. b. L'angle " θ " est-il maximal ?

D'après le cours, nous savons que la fonction cosinus est décroissante sur $[0; \pi]$.

Dans ces conditions, l'angle θ sera maximal dès lors que la fonction $\cos(\theta)$ est minimale. C'est le cas quand: $x = \frac{2}{3}$ et $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$.

Au total, l'angle θ maximal est: $\theta = \frac{2\pi}{3}$ car $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

Donc quand $M = I$.