Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150 ans.

L'objectif de cet exercice est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

Partie A - Modélisation de l'âge d'un épicéa

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;1[$ par :

$$f(x) = 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$$

où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;1[$.
2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

Partie B

On a relevé la hauteur moyenne des épicéas dans des échantillons représentatifs d'arbres âgés de 50 à 150 ans. Le tableau suivant, réalisé à l'aide d'un tableur regroupe ces résultats et permet de calculer la vitesse de croissance moyenne d'un épicéa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Âges (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par année)		0,22	0,245	0,25								

1.a) Interpréter le nombre 0,245 dans la cellule D3.

b) Quelle formule doit-on entrer dans la cellule C3 afin de compléter la ligne 3 en recopiant la cellule C3 vers la droite ?

2. Déterminer la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre du tronc mesuré à 1,30 m du sol vaut 27 cm.

3. La qualité du bois est meilleure au moment où la vitesse de croissance est maximale.

a) Déterminer un intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure en expliquant la démarche.

b) Est-il cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm ?

EXERCICE 4

[Liban 2017]

Partie A: Modélisation de l'âge d'un épicéa

1. Démontrons que la fonction f est strictement croissante sur $]0;1[$:

Ici: • $f(x) = 30 \ln\left(\dfrac{20x}{1-x}\right)$ $\left(30 \times \ln\left(\dfrac{u}{v}\right)\right)$

• $Df =]0;1[$.

• **Calculons f'**:

Posons: $f = 30 \ln\left(\dfrac{g_1}{g_2}\right)$, avec: $g_1(x) = 20x$ et $g_2(x) = 1 - x$.

g_1 et g_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme fonctions polynômes, donc dérivables sur l'intervalle $]0;1[$.

Dans ces conditions, $\dfrac{g_1}{g_2}$ est dérivable sur $]0;1[$ comme quotient $\left(\dfrac{g_1}{g_2}\right)$ de 2 fonctions dérivables sur $]0;1[$, avec: pour tout $x \in]0;1[$, $g_2(x) \neq 0$.

Par conséquent, f est dérivable sur $]0;1[$ comme composée $\left(\ln\left(\dfrac{g_1}{g_2}\right)\right)$ de 2 fonctions dérivables sur $]0;1[$, avec: $\dfrac{g_1}{g_2} > 0$ sur $]0;1[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0;1[$.

Pour tout $x \in]0;1[$:

$$f'(x) = 30 \times \left[\frac{\dfrac{(20)(1-x) - (20x) \times (-1)}{(1-x)^2}}{\dfrac{20x}{1-x}} \right] \quad \left(30 \times \frac{\left(\frac{u}{v}\right)'}{\left(\frac{u}{v}\right)} \right)$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{30}{x(1-x)}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]0; 1[$: $\quad f'(x) = \dfrac{30}{x(1-x)}$.

- **Pour tout $x \in]0; 1[$, $f'(x) > 0$?**

Oui, sur $]0; 1[$, $f'(x) > 0$.

Au total: sur $]0; 1[$, f est strictement croissante.

2. Déterminons les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge soit compris entre 20 et 120 ans:

Il s'agit ici de déterminer x tel que: $\quad 20 \leqslant f(x) \leqslant 120$.

$$20 \leqslant f(x) \leqslant 120 \iff 20 \leqslant 30 \times \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) \leqslant 120$$

$$\iff \frac{2}{3} \leqslant \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) \leqslant 4$$

$$\iff e^{\frac{2}{3}} \leqslant \frac{20x}{1-x} \leqslant e^4$$

$$\iff e^{\frac{2}{3}}(1-x) \leqslant 20x \leqslant e^4(1-x)$$

$$\iff e^{\frac{2}{3}}(1-x) \leqslant 20x \text{ et } 20x \leqslant e^4(1-x).$$

- $e^{\frac{2}{3}}(1-x) \leqslant 20x \iff e^{\frac{2}{3}} \leqslant (20+e^{\frac{2}{3}})\,x \implies x \geqslant \dfrac{e^{\frac{2}{3}}}{20+e^{\frac{2}{3}}}$.

- $20x \leqslant e^4(1-x) \iff (20+e^4)\,x \leqslant e^4 \implies x \leqslant \dfrac{e^4}{20+e^4}$.

Au total, les valeurs du diamètre **D** du tronc sont telles que:

$$\frac{e^{\frac{2}{3}}}{20+e^{\frac{2}{3}}} \leqslant D \leqslant \frac{e^4}{20+e^4}.$$

En cm, les valeurs du diamètre **D** du tronc sont telles que: **9 cm ⩽ D ⩽ 73 cm**.

Partie B: Vitesse et hauteur d'un épicéa

1. a. Interprétons le nombre " 0, 245 ":

" 0, 245 " signifie qu'entre l'âge de 70 ans et l'âge de 80 ans, la hauteur de l'arbre est passée de 15, 6 m à 18, 05 m, et ce, à un taux de croissance annuel moyen de: **" 0, 245 mètres par année "**.

1. b. Déterminons la formule à entrer dans C_3:

La formule à entrer dans C_3 est: << $= \dfrac{C_2 - B_2}{C_1 - B_1}$ >>.

2. Déterminons la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre vaut 27 cm:

- **Détermination de l'âge de l'épicéa ayant 27 cm de diamètre:**

Le diamètre vaut 27 cm, d'où: $x = 0,27$ mètre.

Dans ces conditions, l'âge correspondant à 27 cm de diamètre est:

$$y = f(0,27) \Rightarrow y \approx 60 \text{ ans}.$$

En supposant le taux de croissance annuel moyen égal à 0, 22 (entre 50 ans et 70 ans), à l'âge de 60 ans la hauteur attendue de l'épicéa sera de:

$$\frac{11,2 + 15,6}{2} = 13,4 \text{ mètres}.$$

Au total, la hauteur attendue d'un épicéa de diamètre de 27 cm est de:

13, 4 mètres.

3. a. Déterminons un intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure:

Pour répondre à cette question, nous allons calculer la vitesse de croissance (V) aux points F, G, H, I, J, K, L et M.

F	G	H	I	J	K	L	M
V = 0, 25	0, 25	0, 24	0, 24	0, 24	0, 22	0, 205	0, 1675

D'où la vitesse de croissance est maximale quand elle est égale à: 0, 25.

Ainsi, l'intervalle d'âges demandé est: [80 ; 95] = [E ; G].

3. b. Est-il cohérent de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm ?

Si le diamètre vaut environ 70 cm: $x = 0,70$ mètre.

Dans ces conditions, l'âge correspondant est: $y = f(0,70) \Rightarrow y \approx 115$ ans.

Or quand l'âge est de 115 ans, la vitesse de croissance V ∈] 0, 24 ; 0, 22 [.

Ainsi, il n'est pas rationnel de couper les arbres car, à ce moment-là, la vitesse de croissance n'est pas maximale.