Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

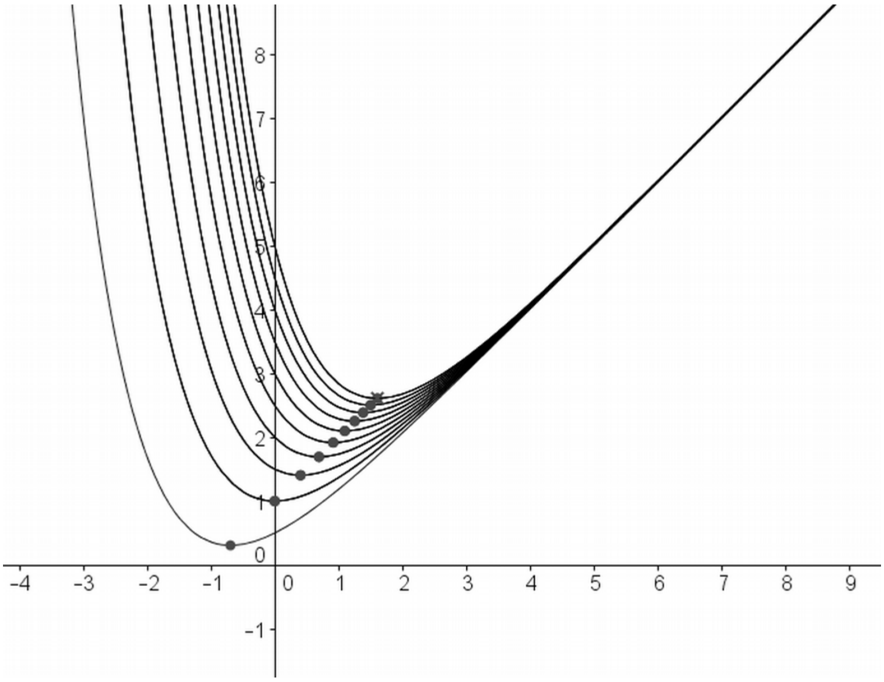
EXERCICE 3 (3 points)

Commun à tous les candidats

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + k\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé. On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathscr{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathscr{C}_k$. Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.

Est-ce le cas ?

EXERCICE 3

[Liban 2017]

Pour tout réel $k > 0$, les points A_k sont-ils alignés ?

Ici: • $f_k(x) = x + k\,e^{-x}$, avec $k > 0$

• $Df = \mathbb{R}$.

Pour répondre à cette question, nous allons montrer que tous les points A_k sont situés sur une même droite dont on déterminera l'équation.

• Posons: $f_k = g_1 + g_2$, avec: $g_1(x) = x$ et $g_2(x) = k\,e^{-x}$.

g_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

g_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction " exponentielle ".

Dans ces conditions, $g_1 + g_2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, $f_k = g_1 + g_2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, nous pouvons calculer f_k' pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $k > 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_k'(x) = 1 - k\,e^{-x}$, avec $k > 0$.

• La fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$ quand: $f_k'(x) = 0$.

$f_k'(x) = 0 \iff \dfrac{k}{e^x} = 1 \iff e^x = k \implies x^* = \ln(k)$ car: $k > 0$.

Ainsi: $y^* = f(x^*) \implies y^* = x^* + 1$.

• Ainsi, tous les points A_k $(x^*; y^*)$ sont situés sur une même droite d'équation: $y = x + 1$.

Au total: **oui**, pour tout réel $k > 0$, les points A_k sont alignés et sont tous situés sur la même droite d'équation: $\boldsymbol{y = x + 1}$.