Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 2 (6 points)

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on étudie quelques grandeurs caractéristiques du fonctionnement des parkings d'une ville.
Dans tout l'exercice, les probabilités seront données avec une précision de 10^{-4}.

*Les parties **A**, **B**, et **C** sont indépendantes.*

Partie A - Durée d'attente pour entrer dans un parking souterrain

On appelle durée d'attente le temps qui s'écoule entre le moment où la voiture se présente à l'entrée du parking et le moment où elle franchit la barrière d'entrée du parking. Le tableau suivant présente les observations faites sur une journée.

Durée d'attente en minute	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[
Nombre de voitures	75	19	10	5

1. Proposer une estimation de la durée d'attente moyenne d'une voiture à l'entrée du parking.
2. On décide de modéliser cette durée d'attente par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ (exprimé en minute).
   a) Justifier que l'on peut choisir $\lambda = 0,5$ min.
   b) Une voiture se présente à l'entrée du parking. Quelle est la probabilité qu'elle mette moins de deux minutes pour franchir la barrière ?
   c) Une voiture attend à l'entrée du parking depuis une minute. Quelle est la probabilité qu'elle franchisse la barrière dans la minute suivante ?

Partie B - Durée et tarifs de stationnement dans ce parking souterrain

Une fois garée, la durée de stationnement d'une voiture est modélisée par une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 70$ min et d'écart-type $\sigma = 30$ min.

1.a) Quelle est la durée moyenne de stationnement d'une voiture ?
   b) Un automobiliste entre et se gare dans le parking. Quelle est la probabilité que sa durée de stationnement dépasse deux heures ?
   c) À la minute près, quel est le temps maximum de stationnement pour au moins 99 % des voitures ?
2. La durée de stationnement est limitée à trois heures. Le tableau donne le tarif de la première heure et chaque heure supplémentaire est facturée à un tarif unique. Toute heure commencée est due intégralement.

Durée de stationnement	Inférieure à 15 min	Entre 15 min et 1 h	Heure supplémentaire
Tarif en euros	Gratuit	3,5	t

Déterminer le tarif t de l'heure supplémentaire que doit fixer le gestionnaire du parking pour que le prix moyen de stationnement d'une voiture soit de 5 euros.

Partie C - Temps d'attente pour se garer dans un parking de centre-ville

La durée de stationnement d'une voiture dans un parking de centre-ville est modélisée par une variable aléatoire T' qui suit une loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ'. On sait que la moyenne du temps de stationnement dans ce parking est égale à 30 minutes et que 75 % des voitures ont un temps de stationnement inférieur à 37 minutes.
Le gestionnaire du parking vise l'objectif que 95 % des voitures aient un temps de stationnement entre 10 et 50 minutes. Cet objectif est-il atteint ?

EXERCICE 2

[Liban 2017]

Partie A: Durée d'attente pour entrer dans un parking souterrain

1. Proposons une estimation de la durée d'attente moyenne d'une voiture à l'entrée du parking:

Une estimation de la durée d'attente moyenne est:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \times x_i}{n},$$ avec:

- $n_i = 75 - 19 - 10 - 5$
- n = nombre total de voitures = 109
- x_i = les centres des classes cad 1 - 3 - 5 - 7.

Ici, nous avons: $\bar{x} = \dfrac{(75 \times 1) + (19 \times 3) + (10 \times 5) + (5 \times 7)}{109}$

=> $\bar{x} \approx 2$ minutes (en arrondissant).

Au total, la durée d'attente moyenne est d'environ: 2 minutes.

2. a. Justifions que l'on peut choisir $\lambda = 0,5$ minutes:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- T suit une loi exponentielle de paramètre: $\lambda = ?$

Dans ces conditions:

- $f(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}$, pour tout $t \in [\,0\,; +\infty\,[$.
- $P(T \leqslant a) = \int_0^a f(t)\, dt$.
- $E(T) = \frac{1}{\lambda}$.

Or une estimation de $E(T)$ est: $\bar{x} = 2$ minutes.

Par identification: $E(T) = 2 \iff \frac{1}{\lambda} = 2 \Rightarrow \lambda = 0,5$ minutes.

Au total, nous pouvons prendre: $\lambda = 0,5$ minutes.

2. b. Déterminons la probabilité que la voiture mette moins de deux minutes pour franchir la barrière:

Il s'agit de calculer: $P(T \leqslant 2)$, avec $f(t) = 0,5\, e^{-0,5t}$.

$$P(T \leqslant 2) = \int_0^2 0,5\, e^{-0,5t}$$

$$= 0,5 \left[-\frac{1}{0,5}\, e^{-0,5t} \right]_0^2$$

$$= -\left[e^{-0,5t} \right]_0^2$$

$\Rightarrow$ $P(T \leqslant 2) = -e^{-1} + 1$, cad: $P(T \leqslant 2) \approx 0,6321$.

Au total, la probabilité demandée est d'environ: 63,21%.

2. c. Déterminons la probabilité que la voiture franchisse la barrière dans la minute suivante, sachant qu'elle attend depuis une minute:

Il s'agit de calculer: $P_{(T \geqslant 1)}(T \leqslant 2)$.

Or: $P_{(T \geq 1)}(T \leq 2) = P(T \leq 1)$, car la loi exponentielle est une loi de durée sans vieillissement.

Ainsi: $P_{(T \geq 1)}(T \leq 2) = P(T \leq 1)$

$$= \int_0^1 0,5\, e^{-0,5t}$$

$$= 0,5 \left[- \frac{1}{0,5}\, e^{-0,5t} \right]_0^1$$

$$= - \left[e^{-0,5t} \right]_0^1$$

$\Rightarrow$ $P_{(T \geq 1)}(T \leq 2) \approx 0,3934$.

Au total, la probabilité demandée est d'environ: 39,34%.

Partie B: Durée et tarifs de stationnement dans ce parking souterrain

1. a. Déterminons la durée moyenne de stationnement d'une voiture:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- D suit la loi normale d'espérance $\mu = 70$ mn et d'écart type $\sigma = 30$ mn.
- Z suit la loi normale centrée réduite.

Dans ces conditions, nous pouvons affirmer que la durée moyenne de stationnement d'une voiture est: $\mu = E(D) = 70$ **minutes**.

1. b. Déterminons la probabilité que sa durée de stationnement dépasse 2 heures:

Il s'agit de calculer: $P(D > 2\text{ h})$ cad $P(D > 120\text{ mn})$.

$$P(D > 120) = P\left(\frac{D - \mu}{\sigma} > \frac{120 - 70}{30}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{5}{3}\right)$$

$$= 1 - P\left(Z < \frac{5}{3}\right).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(D > 120) \approx 0,0478.$$

Au total, la probabilité que la durée de stationnement de la voiture dépasse 2 heures est d'environ: 4, 78%.

1. c. A la minute près, déterminons le temps maximum de stationnement pour au moins 99% des voitures:

Il s'agit de déterminer la valeur du réel " a " (temps maximum), sachant que: $P(D \leqslant a) = 99\%$.

$$P(D \leqslant a) = 99\% \iff P\left(\frac{D - \mu}{\sigma} \leqslant \frac{a - \mu}{\sigma}\right) = 99\%$$

$$\iff P\left(Z \leqslant \frac{a - 70}{30}\right) = 99\%.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{a - 70}{30} \approx 2,325 \Rightarrow a \approx 140 \text{ minutes, à la minute près.}$$

Au total, le temps maximum de stationnement pour au moins 99% des voitures est d'environ: 140 minutes, soit 2 heures et 20 minutes.

2. Déterminons le tarif " t " demandé:

Soit X, la variable aléatoire correspondante au tarif de stationnement (en €).

Ici, il s'agit de déterminer le tarif " t " de l'heure supplémentaire tel que le **prix moyen** de stationnement d'une voiture soit de 5 euros.

Cela revient donc à déterminer " t " tel que: $E(X) = 5$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est:

x_i	0€	3, 5€	(3, 5 + t)€	(3, 5 + 2 t)€
$P(X = x_i)$	$P(D \leqslant 15)$	$P(15 \leqslant D \leqslant 60)$	$P(60 \leqslant D \leqslant 120)$	$P(120 \leqslant D \leqslant 180)$

Or:
- $P(D \leqslant 15) \approx 0,0334$,
- $P(15 \leqslant D \leqslant 60) \approx 0,3361$,
- $P(60 \leqslant D \leqslant 120) \approx 0,5828$,
- $P(120 \leqslant D \leqslant 180) \approx 0,0477$.

(machine à calculer)

Dans ces conditions:

$E(X) = 5 \iff (0,0334 \times 0) + (0,3361 \times 3,5) + (0,5828 \times (3,5 + t)) + (0,0477 \times (3,5 + 2t)) = 5$

$\Rightarrow t \approx 2,384$ €.

Au total, le tarif " t " demandé doit être d'environ: 2 € et 38 centimes.

Partie C : Temps d'attente pour se garer dans un parking de centre-ville

L'objectif du gestionnaire du parking est-il atteint ?

D'après l'énoncé, nous savons que:

- T' suit la loi normale d'espérance $\mu' = 30$ minutes et d'écart type $\sigma' = ?$
- $P(T' \leqslant 37 \text{ minutes}) = 75\%$.

Etape 1: Détermination de σ'.

Il s'agit de déterminer σ' sachant que: $P(T' \leqslant 37) = 75\%$.

$$P(T' \leqslant 37) = 75\% \iff P\left(\frac{T' - 30}{\sigma'} \leqslant \frac{37 - 30}{\sigma'}\right) = 75\%$$

$$\iff P\left(Z \leqslant \frac{7}{\sigma'}\right) = 75\%.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{7}{\sigma'} \approx 0,6745 \Rightarrow \sigma' \approx 10 \text{ minutes}.$$

Donc: $\sigma' \approx 10$ minutes.

Etape 2: Calcul de $P(10 \leqslant T' \leqslant 50)$ avec: $\mu' = 30$ minutes et $\sigma' = 10$ minutes.

Nous savons que: $P(\mu' - 2\sigma' \leqslant T' \leqslant \mu' + 2\sigma') \approx 0,954$.

Or ici, nous remarquons que: $10 = \mu' - 2\sigma'$ et $50 = \mu' + 2\sigma'$.

D'où: $P(10 \leqslant T' \leqslant 50) \approx 0,954$.

Au total: $P(10 \leqslant T' \leqslant 50) \approx 95,4\% > 95\%$ et nous pouvons donc affirmer que **oui** l'objectif du gestionnaire du parking sera atteint.