

Corrigé

Exercice 5



freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7 dont une annexe en page 7/7 qui est à rendre avec la copie.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. **Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.** Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 5 (3 points)**Commun à tous les candidats**

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2} i \times z_n + 5 \end{cases} .$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n .

On considère le nombre complexe $z_A = 4 + 2i$ et A le point du plan d'affixe z_A .

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_A$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2} i \times u_n$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4 - 2i).$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n , les points A , M_n et M_{n+4} sont alignés.

EXERCICE 5 (Liban 2016)

1

①a) Montrons que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = \frac{1}{2}i \times U_n$.

Nous avons :

- $z_0 = 0$

- $z_{n+1} = \frac{1}{2}i \times z_n + 5$

- $z_A = 4 + 2i$ et $A(z_A)$

- $U_n = z_n - z_A$

- $U_{n+1} = z_{n+1} - z_A \Leftrightarrow U_{n+1} = \frac{1}{2}i \times z_n + 5 - 4 - 2i$

$$\Rightarrow \underline{U_{n+1} = \frac{1}{2}i \times z_n + 1 - 2i.}$$

- $\frac{1}{2}i \times U_n = \frac{1}{2}i \times (z_n - z_A) \Leftrightarrow \frac{1}{2}i \times U_n = \frac{1}{2}i \times (z_n - 4 - 2i)$

$$\Rightarrow \underline{\frac{1}{2}i \times U_n = \frac{1}{2}i \times z_n + 1 - 2i.}$$

Au total, nous avons bien: $U_{n+1} = \frac{1}{2}i \times U_n$.

Ainsi: (U_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}i$ et de premier terme $U_0 = 0 - (4 + 2i)$, cad: $U_0 = -4 - 2i$.

①b) Démontrons que, pour tout entier naturel n , $U_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i)$.

Comme (U_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}i$ et de premier terme $U_0 = -4 - 2i$, nous pouvons écrire:

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}i \times U_n \quad \text{ou:} \quad U_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n U_0$$

$$\text{cad:} \quad U_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i).$$

② Démontrons que les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés:

Les points A, B et C sont alignés ssi: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

Pour tout entier naturel n, nous avons:

$$\frac{z_n - z_A}{z_{n+4} - z_A} = \frac{u_n}{u_{n+4}} \Leftrightarrow \frac{z_n - z_A}{z_{n+4} - z_A} = \frac{\left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4-2i)}{\left(\frac{1}{2}i\right)^{n+4} (-4-2i)}$$

$$\Rightarrow \frac{z_n - z_A}{z_{n+4} - z_A} = 16 \in \mathbb{R}.$$

Au total: les points A, M_n et M_{n+4} sont bien alignés.