EXERCICE 5 (Liban 2016)

① ⓐ Montrons que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{1}{2} i \times U_n$:

Nous avons : • $z_0 = 0$

• $z_{n+1} = \frac{1}{2} i \times z_n + 5$

• $z_A = 4 + 2i$ et $A(z_A)$

• $U_n = z_n - z_A$.

• $U_{n+1} = z_{n+1} - z_A \iff U_{n+1} = \frac{1}{2} i \times z_n + 5 - 4 - 2i$

$\Rightarrow U_{n+1} = \frac{1}{2} i \times z_n + 1 - 2i$.

• $\frac{1}{2} i \times U_n = \frac{1}{2} i \times (z_n - z_A) \iff \frac{1}{2} i \times U_n = \frac{1}{2} i \times (z_n - 4 - 2i)$

$\Rightarrow \frac{1}{2} i \times U_n = \frac{1}{2} i \times z_n + 1 - 2i$.

Au total, nous avons bien : $U_{n+1} = \frac{1}{2} i \times U_n$.

Ainsi : (U_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2} i$ et de premier terme $U_0 = 0 - (4 + 2i)$, cad : $U_0 = -4 - 2i$.

ⓑ Démontrons que, pour tout entier naturel n, $U_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4-2i)$:

Comme (U_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2} i$ et de premier terme $U_0 = -4 - 2i$, nous pouvons écrire :

$U_{n+1} = \frac{1}{2} i \times U_n$ ou : $U_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n U_0$

cad : $U_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4 - 2i)$.

② <u>Démontrons que les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés:</u>

Les points A, B et C sont alignés ssi: $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

Pour tout entier naturel n, nous avons:

$$\frac{z_n - z_A}{z_{n+4} - z_A} = \frac{U_n}{U_{n+4}} \iff \frac{z_n - z_A}{z_{n+4} - z_A} = \frac{\left(\frac{1}{2}i\right)^n(-4-2i)}{\left(\frac{1}{2}i\right)^{n+4}(-4-2i)}$$

$$\implies \frac{z_n - z_A}{z_{n+4} - z_A} = 16 \in \mathbb{R}.$$

Au total: les points A, M_n et M_{n+4} sont bien alignés.