Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série S
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7 dont une annexe en page 7/7 qui est à rendre avec la copie.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 4 (5 points)

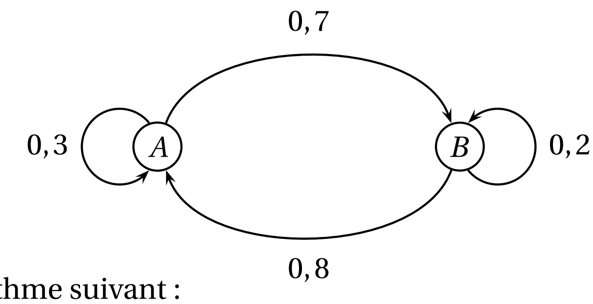
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Un point est attribué par réponse exacte justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

- On considère le système $\begin{cases} n \equiv 1\,[5] \\ n \equiv 3\,[4] \end{cases}$ d'inconnue n entier relatif.

  Affirmation 1 : Si n est solution de ce système alors $n - 11$ est divisible par 4 et par 5.
  Affirmation 2 : Pour tout entier relatif k, l'entier $11 + 20k$ est solution du système.
  Affirmation 3 : Si un entier relatif n est solution du système alors il existe un entier relatif k tel que $n = 11 + 20k$.

- Un automate peut se trouver dans deux états A ou B. À chaque seconde il peut soit rester dans l'état où il se trouve, soit en changer, avec des probabilités données par le graphe probabiliste ci-dessous. Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état A après n secondes et b_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état B après n secondes. Au départ, l'automate est dans l'état B.



On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a et b sont des réels
Initialisation :	a prend la valeur 0
	b prend la valeur 1
Traitement :	Pour k allant de 1 à 10
	a prend la valeur $0,8a + 0,3b$
	b prend la valeur $1 - a$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher a
	Afficher b

Affirmation 4 : En sortie, cet algorithme affiche les valeurs de a_{10} et b_{10}.
Affirmation 5 : Après 4 secondes, l'automate a autant de chances d'être dans l'état A que d'être dans l'état B.

EXERCICE 4

[Liban 2016]

1\. a. Affirmation 1: " Si n est solution du système alors $n - 11$ est divisible par 4 et par 5 ".

C'est vrai.

Justifions le.

Soit le système: $\begin{cases} n \equiv 1\,[5] & (1) \\ n \equiv 3\,[4] & (2) \end{cases}$, $n \in \mathbb{Z}$.

- Si n est solution de (1), nous pouvons écrire:

$$n - 11 \equiv 1 - 11\,[5] \iff n - 11 \equiv -10\,[5]$$
$$\iff n - 11 \equiv -2 \times 5\,[5]$$
$$\iff n - 11 \equiv 0\,[5].$$

- Si n est solution de (2), nous pouvons écrire:

$$n - 11 \equiv 3 - 11\,[4] \iff n - 11 \equiv -8\,[4]$$
$$\iff n - 11 \equiv -2 \times 4\,[4]$$
$$\iff n - 11 \equiv 0\,[4].$$

Au total: l'affirmation 1 est vraie.

1. b. Affirmation 2 : " Pour tout entier relatif k, l'entier $11 + 20k$ est solution du système ".

C'est vrai.

Justifions le.

- Soit k un entier relatif, nous pouvons écrire :

$20k = 4 \times 5 \times k$ et par conséquent : $20k \equiv 0\ [5]$.

D'où : $11 + 20k \equiv 11\ [5] \iff 11 + 20k \equiv 1 + 10\ [5]$

$\iff 11 + 20k \equiv 1 + 2 \times 5\ [5]$

$\iff 11 + 20k \equiv 1\ [5]$.

- Soit k un entier relatif, nous pouvons écrire :

$20k = 4 \times 5 \times k$ et par conséquent : $20k \equiv 0\ [4]$.

D'où : $11 + 20k \equiv 11\ [4] \iff 11 + 20k \equiv 3 + 8\ [4]$

$\iff 11 + 20k \equiv 3 + 2 \times 4\ [4]$

$\iff 11 + 20k \equiv 3\ [4]$.

Ainsi le système est vérifié.

Au total : l'affirmation 2 est vraie.

1. c. Affirmation 3 : " Si un entier relatif n est solution du système alors il existe un entier relatif k avec $n = 11 + 20k$ ".

C'est vrai.

Justifions le.

Soit n un entier relatif solution du système.

D'après la question **1. a.**, $n - 11$ est alors divisible par 4 et par 5.

Comme 4 et 5 sont premiers entre eux, d'après **le théorème de GAUSS**, le nombre $n - 11$ est divisible par $4 \times 5 = 20$.

Ainsi, il existe un entier relatif k tel que:

$$n - 11 = 20k \iff n = 11 + 20k.$$

Au total: l'affirmation 3 est vraie.

2. a. Affirmation 4: **" En sortie, l'algorithme affiche les valeurs de a_{10} et b_{10} ".**

C'est faux.

Justifions le.

D'après le graphe probabiliste, nous pouvons écrire:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,3a_n + 0,8b_n \\ b_{n+1} = 0,7a_n + 0,2b_n \end{cases}.$$

Ainsi, pour qu'à la sortie, l'algorithme affiche les valeurs de a_{10} et b_{10}, il faudrait remplacer la ligne " a prend la valeur $0,8\,a + 0,3\,b$ " par la ligne " a prend la valeur $0,3a + 0,8b$ ".

Au total: l'affirmation 4 est fausse.

2. b. Affirmation 5: **" Après 4 secondes, l'automate a autant de chances d'être dans l'état A que d'être dans l'état B ".**

C'est vrai.

Justifions le.

Pour répondre à cette affirmation, nous devons calculer a_4 et b_4.

Après calculs, nous obtenons: $a_4 = 0,5$ et $b_4 = 1 - a_4 = 0,5$.

Et donc: $a_4 = b_4 = \frac{1}{2}$.

Au total: l'affirmation 5 est vraie.