

EXERCICE 4

[Liban 2016]

1. a. Affirmation 1: " Si n est solution du système alors $n - 11$ est divisible par 4 et par 5 ".

C'est vrai.

Justifions le.

Soit le système:
$$\begin{cases} n \equiv 1[5] & (1) \\ n \equiv 3[4] & (2) \end{cases}, n \in \mathbb{Z}.$$

• Si n est solution de (1), nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} n - 11 &\equiv 1 - 11[5] \Leftrightarrow n - 11 \equiv -10[5] \\ &\Leftrightarrow n - 11 \equiv -2 \times 5[5] \\ &\Leftrightarrow n - 11 \equiv 0[5]. \end{aligned}$$

• Si n est solution de (2), nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} n - 11 &\equiv 3 - 11[4] \Leftrightarrow n - 11 \equiv -8[4] \\ &\Leftrightarrow n - 11 \equiv -2 \times 4[4] \\ &\Leftrightarrow n - 11 \equiv 0[4]. \end{aligned}$$

Au total: l'affirmation 1 est vraie.

1. b. Affirmation 2: " Pour tout entier relatif k , l'entier $11 + 20k$ est solution du système ".

C'est vrai.

Justifions le.

- Soit k un entier relatif, nous pouvons écrire:

$$20k = 4 \times 5 \times k \text{ et par conséquent: } 20k \equiv 0 [5].$$

$$\text{D'où: } 11 + 20k \equiv 11 [5] \Leftrightarrow 11 + 20k \equiv 1 + 10 [5]$$

$$\Leftrightarrow 11 + 20k \equiv 1 + 2 \times 5 [5]$$

$$\Leftrightarrow 11 + 20k \equiv 1 [5].$$

- Soit k un entier relatif, nous pouvons écrire:

$$20k = 4 \times 5 \times k \text{ et par conséquent: } 20k \equiv 0 [4].$$

$$\text{D'où: } 11 + 20k \equiv 11 [4] \Leftrightarrow 11 + 20k \equiv 3 + 8 [4]$$

$$\Leftrightarrow 11 + 20k \equiv 3 + 2 \times 4 [4]$$

$$\Leftrightarrow 11 + 20k \equiv 3 [4].$$

Ainsi le système est vérifié.

Au total: l'affirmation 2 est vraie.

1. c. Affirmation 3: " Si un entier relatif n est solution du système alors il existe un entier relatif k avec $n = 11 + 20k$ ".

C'est vrai.

Justifions le.

Soit n un entier relatif solution du système.

D'après la question 1. a, $n - 11$ est alors divisible par 4 et par 5.

Comme 4 et 5 sont premiers entre eux, d'après **le théorème de GAUSS**, le nombre $n - 11$ est divisible par $4 \times 5 = 20$.

Ainsi, il existe un entier relatif k tel que:

$$n - 11 = 20k \iff n = 11 + 20k.$$

Au total: l'affirmation 3 est vraie.

2. a. Affirmation 4: " En sortie, l'algorithme affiche les valeurs de a_{10} et b_{10} ".

C'est faux.

Justifions le.

D'après le graphe probabiliste, nous pouvons écrire:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,3a_n + 0,8b_n \\ b_{n+1} = 0,7a_n + 0,2b_n \end{cases}.$$

Ainsi, pour qu'à la sortie, l'algorithme affiche les valeurs de a_{10} et b_{10} ,

il faudrait remplacer la ligne " a prend la valeur $0,8a + 0,3b$ " par la ligne

" a prend la valeur $0,3a + 0,8b$ ".

Au total: l'affirmation 4 est fausse.

2. b. Affirmation 5: " Après 4 secondes, l'automate a autant de chances d'être dans l'état A que d'être dans l'état B ".

C'est vrai.

Justifions le.

Pour répondre à cette affirmation, nous devons calculer a_4 et b_4 .

Après calculs, nous obtenons: $a_4 = 0,5$ et $b_4 = 1 - a_4 = 0,5$.

Et donc: $a_4 = b_4 = \frac{1}{2}$.

Au total: l'affirmation 5 est vraie.