Corrigé

Exercice 5

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série S
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7 dont une annexe en page 7/7 qui est à rendre avec la copie.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 5 (3 points)

Commun à tous les candidats

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i} \times z_n + 5 \end{cases}.$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n.
On considère le nombre complexe $z_A = 4 + 2\,\mathrm{i}$ et A le point du plan d'affixe z_A.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_A$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i} \times u_n$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^n (-4 - 2\,\mathrm{i}).$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

EXERCICE 5 (Liban 2016)

① ⓐ Montrons que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{1}{2} i \times U_n$:

Nous avons : • $z_0 = 0$

• $z_{n+1} = \frac{1}{2} i \times z_n + 5$

• $z_A = 4 + 2i$ et $A(z_A)$

• $U_n = z_n - z_A$.

• $U_{n+1} = z_{n+1} - z_A \Leftrightarrow U_{n+1} = \frac{1}{2} i \times z_n + 5 - 4 - 2i$

$\Rightarrow U_{n+1} = \frac{1}{2} i \times z_n + 1 - 2i$.

• $\frac{1}{2} i \times U_n = \frac{1}{2} i \times (z_n - z_A) \Leftrightarrow \frac{1}{2} i \times U_n = \frac{1}{2} i \times (z_n - 4 - 2i)$

$\Rightarrow \frac{1}{2} i \times U_n = \frac{1}{2} i \times z_n + 1 - 2i$.

Au total, nous avons bien : $U_{n+1} = \frac{1}{2} i \times U_n$.

Ainsi : (U_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2} i$ et de premier terme $U_0 = 0 - (4+2i)$, cad : $U_0 = -4 - 2i$.

ⓑ Démontrons que, pour tout entier naturel n, $U_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4-2i)$:

Comme (U_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2} i$ et de premier terme $U_0 = -4 - 2i$, nous pouvons écrire :

$U_{n+1} = \frac{1}{2} i \times U_n$ ou : $U_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n U_0$

cad : $U_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4-2i)$.

② Démontrons que les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés:

Les points A, B et C sont alignés ssi: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

Pour tout entier naturel n, nous avons:

$$\frac{z_n - z_A}{z_{n+4} - z_A} = \frac{U_n}{U_{n+4}} \iff \frac{z_n - z_A}{z_{n+4} - z_A} = \frac{\left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4-2i)}{\left(\frac{1}{2}i\right)^{n+4} (-4-2i)}$$

$$\Rightarrow \frac{z_n - z_A}{z_{n+4} - z_A} = 16 \in \mathbb{R}.$$

Au total: les points A, M_n et M_{n+4} sont bien alignés.