EXERCICE 4

[Liban 2016]

1. **Affirmation 1**: " La probabilité que la variable aléatoire X appartienne à l'intervalle $[23,2\,;+\infty[$ vaut 0,046 ".

C'est Faux.

Justifions le.

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X suit une loi normale d'espérance $\mu = 20$ et d'écart type $\sigma = ?$
- $P\,(20 \leqslant X \leqslant 21,6) = 0,34$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P\,(X \geqslant 23,2)$.

Etape 1: Détermination de σ.

$$P\,(20 \leqslant X \leqslant 21,6) = 0,34 \iff P\left(\frac{20-20}{\sigma} \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{21,6-20}{\sigma}\right) = 0,34$$

$$\iff P\left(0 \leqslant T \leqslant \frac{1,6}{\sigma}\right) = 0,34$$

$$\iff P\left(T \leqslant \frac{1,6}{\sigma}\right) - P\,(T \leqslant 0) = 0,34$$

$$\iff P\left(T \leqslant \frac{1,6}{\sigma}\right) - 0,5 = 0,34$$

$(P\,(T \leqslant 0) = 0,5)$

$$\Rightarrow \ P\left(T \leqslant \frac{1,6}{\sigma}\right) = 0,84.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $\frac{1,6}{\sigma} \approx 0,9944 \ \Rightarrow \ \sigma \approx 1,609.$

Au total: l'écart type de la variable aléatoire X est $\sigma \approx 1,609$.

Etape 2: Calcul de $P(X \geqslant 23,2)$.

$$P(X \geqslant 23,2) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geqslant \frac{23,2-20}{1,609}\right)$$

$$= P\left(T \geqslant \frac{3,2}{1,609}\right)$$

$$= 1 - P\left(T \leqslant \frac{3,2}{1,609}\right)$$

$$= 1 - P(T \leqslant 1,988).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(X \geqslant 23,2) \approx 0,023.$$

Au total: comme $0,023 \neq 0,046$, l'affirmation 1 est fausse.

2. Affirmation 2: **" L'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $|z| = 1$ est une droite passant par le point $A(1;0)$ ".**

C'est Vrai.

Justifions le.

$$|z| = 1 \iff \left|\frac{i.z}{z-2}\right| = 1, \text{ avec: } z \neq 2$$

$$<=> \frac{|i.z|}{|z-2|} = 1$$

$$<=> \frac{|z|}{|z-2|} = 1$$

$$<=> |z| = |z-2|.$$

Soient les points: $A(1;0)$, $B(2;0)$ et $M(z)$.

Nous pouvons affirmer que l'ensemble des points M tels que $|Z| = 1$ est donc la médiatrice du segment [OB].

Et: la médiatrice du segment [OB] est une droite passant par le point A. Donc l'affirmation 2 est vraie.

3. Affirmation 3: " Z est un imaginaire pur ssi z est réel ".

C'est Vrai.

Justifions le.

$Z = \dfrac{i.z}{z-2}$, avec: $z = a + i \cdot b$.

Dans ces conditions:

$$Z = \frac{i.z}{z-2} <=> Z = \frac{i.(a+i.b)}{(a+i.b)-2}$$

$$<=> Z = \frac{i.a - b}{(a-2)+i.b}$$

$$<=> Z = \frac{(i.a-b)[(a-2)-i.b]}{(a-2)^2+b^2}$$

$$<=> Z = \frac{i.a^2 - 2\,i.a + ab - ba + 2b + i.b^2}{(a-2)^2+b^2}$$

$$\Rightarrow \; Z = \frac{2b}{(a-2)^2+b^2} + i \cdot \left(\frac{a^2+b^2-2a}{(a-2)^2+b^2}\right).$$

Ainsi: Z est un imaginaire pur ssi $\frac{2b}{(a-2)^2+b^2} = 0 \Rightarrow b = 0.$

Au total: Z est un imaginaire pur ssi $b = 0$ cad ssi $z = a$, ce qui revient à dire ssi z est un réel. Cela justifie le fait que l'affirmation 3 soit vraie.

4. Affirmation 4: " L'équation $f(x) = 0,5$ admet une solution unique sur IR ".

C'est Vrai.

Justifions le.

Pour cela nous allons tout simplement résoudre l'équation: $f(x) = 0,5$.

$$f(x) = 0,5 \iff \frac{3}{4+6e^{-2x}} = 0,5$$

$$\iff 4 + 6e^{-2x} = 6$$

$$\iff 3e^{-2x} = 1$$

$$\iff e^{2x} = 3$$

$$\iff 2x = \ln(3)$$

$$\Rightarrow \; x = \frac{\ln(3)}{2}.$$

Au total: l'équation $f(x) = 0,5$ admet une solution unique sur IR qui est égale à $x = \frac{\ln(3)}{2}$. Cela justifie le fait que l'affirmation 4 soit vraie.

5. **Affirmation 5**: " L'algorithme affiche en sortie la valeur $0,54$ ".

C'est Faux.

Justifions le.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

- quand $X = 0,54$, $Y = 0,4969 < 0,5$
- quand $X = 0,54 + 0,01 = 0,55$, $Y = 0,5002 > 0,5$.

(et là, l'algorithme s'arrête)

Au total: l'algorithme affiche en sortie la valeur $0,55$. L'affirmation 5 est donc fausse.