Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série S
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7 dont une annexe en page 7/7 qui est à rendre avec la copie.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

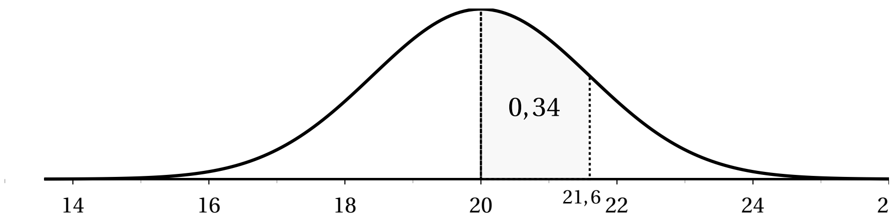
Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. **Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.** Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Un point est attribué par réponse exacte justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

- Sur le schéma ci-dessous on a représenté la courbe de densité d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 20$. La probabilité que la variable aléatoire X soit comprise entre 20 et 21,6 est égale à 0,34.



Affirmation 1 : La probabilité que la variable aléatoire X appartienne à l'intervalle $[23,2\,;+\infty[$ vaut environ 0,046.

- Soit z un nombre complexe différent de 2. On pose :

$$Z = \frac{\mathrm{i}z}{z-2}$$

Affirmation 2 : L'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $|Z| = 1$ est une droite passant par le point $A(1\,;0)$.
Affirmation 3 : Z est un imaginaire pur si et seulement si z est réel.

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{4+6\mathrm{e}^{-2x}}$$

Affirmation 4 : L'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
Affirmation 5 : L'algorithme suivant affiche en sortie la valeur 0,54.

Variables :	X et Y sont des réels
Initialisation :	X prend la valeur 0
	Y prend la valeur $\frac{3}{10}$
Traitement :	Tant que $Y < 0,5$
	X prend la valeur $X + 0,01$
	Y prend la valeur $\frac{3}{4+6\mathrm{e}^{-2X}}$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher X

EXERCICE 4

[Liban 2016]

1. Affirmation 1: " La probabilité que la variable aléatoire X appartienne à l'intervalle $[23,2\,;+\infty[$ vaut 0,046 ".

C'est Faux.

Justifions le.

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X suit une loi normale d'espérance $\mu = 20$ et d'écart type $\sigma = ?$
- $P(20 \leqslant X \leqslant 21,6) = 0,34$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P(X \geqslant 23,2)$.

Etape 1: Détermination de σ.

$$P(20 \leqslant X \leqslant 21,6) = 0,34 \iff P\left(\frac{20-20}{\sigma} \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{21,6-20}{\sigma}\right) = 0,34$$

$$\iff P\left(0 \leqslant T \leqslant \frac{1,6}{\sigma}\right) = 0,34$$

$$\iff P\left(T \leqslant \frac{1,6}{\sigma}\right) - P(T \leqslant 0) = 0,34$$

$$\iff P\left(T \leqslant \frac{1,6}{\sigma}\right) - 0,5 = 0,34$$

$(P(T \leqslant 0) = 0,5)$

$$\Rightarrow P\left(T \leqslant \frac{1,6}{\sigma}\right) = 0,84.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $\frac{1,6}{\sigma} \approx 0,9944 \Rightarrow \sigma \approx 1,609.$

Au total: l'écart type de la variable aléatoire X est $\sigma \approx 1,609$.

Etape 2: Calcul de $P(X \geqslant 23,2)$.

$$P(X \geqslant 23,2) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geqslant \frac{23,2-20}{1,609}\right)$$

$$= P\left(T \geqslant \frac{3,2}{1,609}\right)$$

$$= 1 - P\left(T \leqslant \frac{3,2}{1,609}\right)$$

$$= 1 - P(T \leqslant 1,988).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(X \geqslant 23,2) \approx 0,023.$$

Au total: comme $0,023 \neq 0,046$, l'affirmation 1 est fausse.

2. Affirmation 2: **" L'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $|Z| = 1$ est une droite passant par le point A (1 ; 0) ".**

C'est Vrai.

Justifions le.

$$|Z| = 1 \Longleftrightarrow \left|\frac{i.z}{z-2}\right| = 1, \text{ avec: } z \neq 2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{|i.z|}{|z-2|} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{|z|}{|z-2|} = 1$$

$$\Longleftrightarrow |z| = |z-2|.$$

Soient les points: A (1 ; 0), B (2 ; 0) et M (z).

Nous pouvons affirmer que l'ensemble des points M tels que $|Z| = 1$ est donc la médiatrice du segment [OB].

Et: la médiatrice du segment [OB] est une droite passant par le point A. Donc l'affirmation 2 est vraie.

3. Affirmation 3: " Z est un imaginaire pur ssi z est réel ".

C'est Vrai.

Justifions le.

$Z = \dfrac{i.z}{z-2}$, avec: $z = a + i \cdot b$.

Dans ces conditions:

$$Z = \frac{i.z}{z-2} \Longleftrightarrow Z = \frac{i.(a + i.b)}{(a + i.b) - 2}$$

$$\Longleftrightarrow Z = \frac{i.a - b}{(a-2) + i.b}$$

$$\Longleftrightarrow Z = \frac{(i.a - b)\,[(a-2) - i.b]}{(a-2)^2 + b^2}$$

$$\Longleftrightarrow Z = \frac{i.a^2 - 2\,i.a + ab - ba + 2b + i.b^2}{(a-2)^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \ Z = \frac{2b}{(a-2)^2+b^2} + i\cdot\left(\frac{a^2+b^2-2a}{(a-2)^2+b^2}\right).$$

Ainsi: Z est un imaginaire pur ssi $\dfrac{2b}{(a-2)^2+b^2} = 0 \Rightarrow b = 0.$

Au total: Z est un imaginaire pur ssi $b = 0$ cad ssi $z = a$, ce qui revient à dire ssi z est un réel. Cela justifie le fait que l'affirmation 3 soit vraie.

4. Affirmation 4: " L'équation $f(x) = 0,5$ admet une solution unique sur $I\!R$ ".

C'est Vrai.

Justifions le.

Pour cela nous allons tout simplement résoudre l'équation: $f(x) = 0,5$.

$$f(x) = 0,5 \iff \frac{3}{4+6e^{-2x}} = 0,5$$

$$\iff 4+6e^{-2x} = 6$$

$$\iff 3e^{-2x} = 1$$

$$\iff e^{2x} = 3$$

$$\iff 2x = \ln(3)$$

$$\Rightarrow x = \frac{\ln(3)}{2}.$$

Au total: l'équation $f(x) = 0,5$ admet une solution unique sur $I\!R$ qui est égale à $x = \dfrac{\ln(3)}{2}$. Cela justifie le fait que l'affirmation 4 soit vraie.

5. **Affirmation 5**: " L'algorithme affiche en sortie la valeur $0,54$ ".

C'est Faux.

Justifions le.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

- quand $X = 0,54$, $Y = 0,4969 < 0,5$
- quand $X = 0,54 + 0,01 = 0,55$, $Y = 0,5002 > 0,5$.

(et là, l'algorithme s'arrête)

Au total: l'algorithme affiche en sortie la valeur $0,55$. L'affirmation 5 est donc fausse.