

EXERCICE 3

[Liban 2016]

Partie A:

1. Étudions le sens de variation de f sur $[0;1]$:

• Calculons f' :

Ici: • $f(x) = \frac{1}{1 + e^{1-x}}$

• $Df = [0;1]$.

Posons: $f = \frac{f_1}{f_1 + f_2}$, avec: $f_1(x) = 1$ et $f_2(x) = e^{1-x}$.

f_1 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme, donc dérivable sur $[0;1]$.

f_2 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur $[0;1]$.

Par conséquent, $h = f_1 + f_2$ est dérivable sur $[0;1]$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $[0;1]$.

Dans ces conditions, f est dérivable sur $[0;1]$ comme quotient $\left(\frac{f_1}{h}\right)$ de 2 fonctions dérivables sur $[0;1]$, avec: pour tout $x \in [0;1]$, $h(x) \neq 0$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0;1]$.

Pour tout $x \in [0;1]$: $f'(x) = \frac{0 \times (1 + e^{1-x}) - 1 \times (-e^{1-x})}{(1 + e^{1-x})^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^{1-x}}{(1 + e^{1-x})^2}$.

Au total: pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) = \frac{e^{1-x}}{(1 + e^{1-x})^2}$.

• Étudions le signe de f' sur $[0;1]$:

Pour tout $x \in [0;1]$: $f'(x) > 0$.

Ainsi: pour tout $x \in [0;1]$, f est strictement croissante.

• Dressons le tableau de variation de f sur $[0;1]$:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	0	1
f'	+	
f		

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = \frac{1}{1+e}$,

• $b = f(1) \Rightarrow b = 1$.

2. Montrons que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) = \frac{e^x}{e^x + e}$:

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{1-x}} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{e^x} \times \left(\frac{1}{1+e^{1-x}} \right)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{e^x + e^x \times e^{1-x}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{e^x}{e^x + e}$$

Au total, pour tout $x \in [0;1]$, nous avons bien: $f(x) = \frac{e^x}{e^x + e}$.

3. Montrons que $\int_0^1 f(x) dx = \ln(2) + 1 - \ln(1+e)$:

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_0^1 f(x) dx$.

f est continue sur $[0;1]$, elle admet donc des primitives sur $[0;1]$ et par conséquent: I existe.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+e} dx \\ &= \int_0^1 \frac{U'(x)}{U(x)} dx, \text{ avec: } U(x) = e^x + e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= [\ln |U(x)|]_0^1 \\ &= [\ln |e^x + e|]_0^1 \\ &= [\ln(e^x + e)]_0^1, \text{ car sur } [0;1]: e^x + e > 0 \\ &= \ln(2e) - \ln(1+e) \\ &\Rightarrow I = \ln(2) + \ln(e) - \ln(1+e). \end{aligned}$$

Au total, nous avons bien: $I = \ln(2) + 1 - \ln(1+e)$.



freemaths.fr

EXERCICE 3

[Liban 2016]

Partie B:

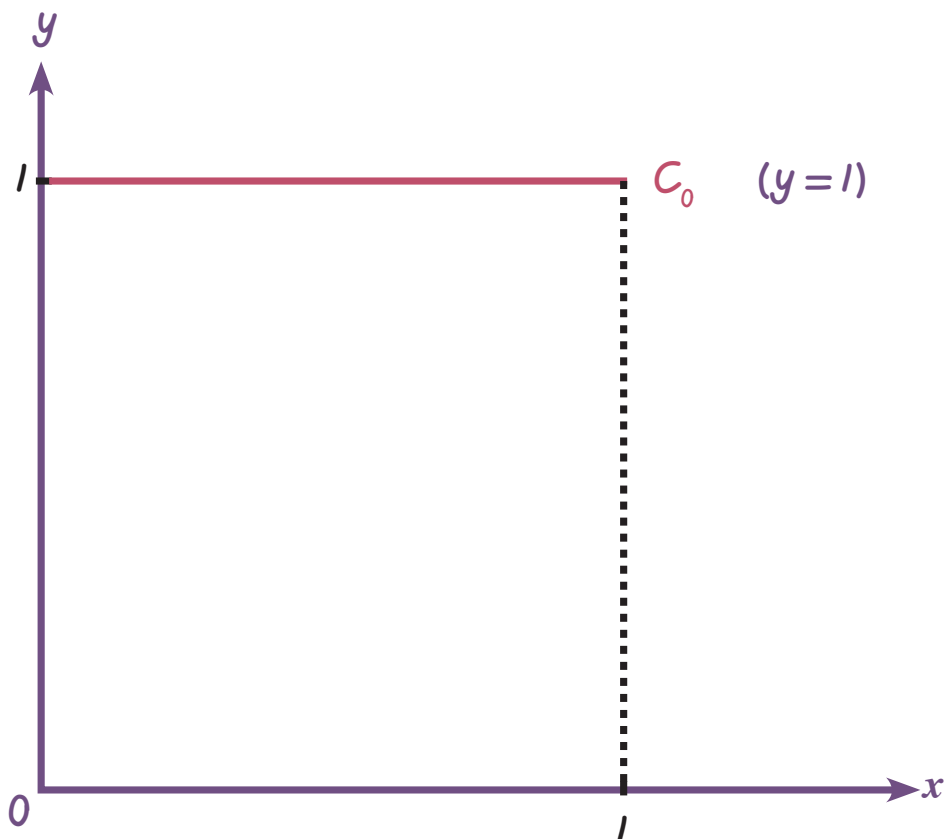
1. Courbe représentative C_0 de la fonction f_0 :

Soit $n = 0$; la fonction f_0 définie sur $[0,1]$ est:

$$f_0(x) = \frac{1}{1 + 0 \times e^{1-x}} \Rightarrow f_0(x) = 1.$$

La courbe représentative C_0 a donc pour équation: $y = 1$ ($x \in [0,1]$).

D'où le graphique suivant:



2. Interprétons graphiquement U_n et calculons U_0 :

- D'après l'énoncé, nous avons:

$$U_n = \int_0^1 f_n(x) dx, \text{ avec: } f_n(x) = \frac{1}{1 + ne^{-x}}.$$

Pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout entier naturel n : $ne^{-x} > 0$.

Dans ces conditions: $\frac{1}{1 + ne^{-x}} > 0 \iff f_n(x) > 0$.

Ainsi: U_n représente l'aire sous la courbe C_n délimitée par l'axe des abscisses et les droites d'équation: $x = 0$ et $x = 1$.

$$\bullet U_0 = \int_0^1 f_0(x) dx \iff U_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+0} dx$$

$$\iff U_0 = \int_0^1 dx$$

$$\iff U_0 = [x]_0^1$$

$$\Rightarrow U_0 = 1.$$

Au total: $\int_0^1 f_0(x) dx = 1$.

3. Déterminons la conjecture quant au sens de variation de la suite (U_n) et démontrons là:

- La conjecture que nous pouvons émettre quant au sens de variation de la suite (U_n) est:

" on pourrait, a priori, penser que la suite (U_n) est strictement décroissante ".

De plus, (U_n) est positive et semble converger vers " 0 " (minorant).

- (U_n) strictement décroissante ?

Il s'agit de déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$.

Posons: $f_{n+1}(x) = \frac{1}{1 + (n+1)e^{-x}}$ et $f_n(x) = \frac{1}{1 + ne^{-x}}$.

- Notons:
- les fonctions f_{n+1} et f_n sont continues sur $[0,1]$;
 - elles admettent donc des primitives sur $[0,1]$, et par conséquent:

(a)
$$\int_0^1 f_{n+1}(x) dx \text{ et } \int_0^1 f_n(x) dx \text{ existent ;}$$

- de plus, les fonctions f_{n+1} et f_n sont positives sur $[0,1]$;
- enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Pour tout entier naturel n et pour tout $x \in [0,1]$, nous avons:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \frac{(1 + ne^{-x}) - (1 + (n+1)e^{-x})}{(1 + (n+1)e^{-x})(1 + ne^{-x})} = D \\ &= \frac{-e^{-x}}{D} < 0. \end{aligned}$$

Donc $f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$ car $D > 0$ et $-e^{-x} < 0$.

Par ailleurs, comme les conditions (a) sont toutes réunies, nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0 &\Leftrightarrow f_{n+1}(x) < f_n(x) \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 f_{n+1}(x) dx < \int_0^1 f_n(x) dx \\ &\Rightarrow U_{n+1} < U_n. \end{aligned}$$

Comme $U_{n+1} < U_n$, (U_n) est bien une suite strictement décroissante.

4. Déterminons la limite de la suite (U_n) :

Nous savons que toute suite décroissante et minorée est convergente.

- Or ici:
- (U_n) est minorée par $m = 0$, ($\int_0^1 f_n(x) dx > 0$)
 - (U_n) est décroissante, pour tout entier naturel n .

Donc nous pouvons affirmer que (U_n) est convergente.

Et par conséquent, la suite (U_n) admet une limite finie.