EXERCICE 2

[Liban 2016]

Partie A: Le lance-balle

1. Déterminons la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite:

Préalablement, nous allons déterminer, en justifiant, la loi de la variable aléatoire X correspondant au nombre de balles envoyées à droite.

Soit l'expérience aléatoire consistant à envoyer une série de 20 balles.

Soient les événements $A =$ " la balle est envoyée à droite ", et $\bar{A} =$ " la balle est envoyée à gauche ".

Nous sommes en présence de 20 expériences aléatoires indépendantes, avec $\Omega = \{ A ; \bar{A} \}$ et $X(\Omega) = \{0, 1, 2, ..., 20\}$.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de A suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 20$ et $p = 0.5$.

Et, nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(20 ; 0.5)$.

En fait, on répète 20 fois un schéma de Bernoulli.

Dans ces conditions, il s'agit de calculer:

$$P(X = 10) \text{ avec: } X \rightsquigarrow B(20 ; 0.5).$$

Or: $P(X = 10) = \binom{20}{10} (0.5)^{10} (0.5)^{10}$

$$\Rightarrow P(X = 10) \approx 17.6\%.$$

(à l'aide d'une machine à calculer)

Au total, il y a 17.6% de chance pour que le lance-balle envoie 10 balles à droite.

2. Déterminons la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite:

Il s'agit de calculer: $P(5 \leq X \leq 10)$.

Or: $P(5 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 4)$.

À l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(5 \leq X \leq 10) \approx 58.2\%.$$

Au total, il y a 58.2% de chance pour que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite.

Partie B: Le réservoir à 100 balles

Déterminons si les doutes du joueur sont justifiés:

Ici, nous avons:
- $n = 100$
- $p = 50\%$
- $f = \frac{42}{100} \Rightarrow f = 42\%$.

Dans ces conditions:

$n = 100 \geq 30$, $n.p = 50 \geq 5$ et $n.(1 - p) = 50 \geq 5$.

Les conditions sont donc réunies.

On choisit un échantillon aléatoire de 100 balles.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = [\, p - 1.96 \times \left(\frac{p(1-p)}{n} \right)^{1/2} ; p + 1.96 \times \left(\frac{p(1-p)}{n} \right)^{1/2} \,],$$

cad: $I = [\, 0.5 - 1.96 \times \left(\frac{0.5}{10} \right) ; 0.5 + 1.96 \times \left(\frac{0.5}{10} \right)]$.

À l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [\, 40\% \,;\, 60\% \,]$.

Or la fréquence " f " de balles lancées à droite, sur l'échantillon, est telle que:

$$f = 42\% \in I.$$

Les doutes du joueur ne sont donc pas justifiés.

Partie C: Balles liftées - Balles coupées

Déterminons la probabilité que la balle soit envoyée à droite sachant que le lance-balle envoie une balle coupée:

D'après l'énoncé, nous avons:

- D = " le lance-balle envoie la balle à droite ".
- G = " le lance-balle envoie la balle à gauche ".
- L = " la balle est liftée ".
- C = " la balle est coupée ".

- $P(D) = 0.5$
- $P(G) = 0.5$

$(0.5 + 0.5 = 1)$.

- $P(D \cap L) = 0.24$.

- $P(G \cap C) = 0.235$

(ou: $P(\overline{D} \cap \overline{L}) = 0.235$).

Ici, il s'agit de calculer: $P_C(D)$.

$$P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)}.$$

• L'événement: $C = (C \cap D) \cup (C \cap G)$.

D'où: $P(C) = P(C \cap D) + P(C \cap G)$

cad: $P(C) = P(C \cap D) + 0.235$.

• L'événement: $D = (D \cap L) \cup (D \cap C)$.

D'où: $P(D) = P(D \cap L) + P(D \cap C)$. (a)

Or: $P(D) = 0.5$ et $P(D \cap L) = 0.24$.

Par conséquent: $(a) \iff P(D \cap C) = 0.5 - 0.24$

$$\Rightarrow P(D \cap C) = 0.26.$$

• En définitive: $P_C(D) = \dfrac{0.26}{0.26 + 0.235} \Rightarrow P_C(D) = 52.5\%$.

Au total, il y a 52.5% de chance pour que la balle soit envoyée à droite sachant que le lance-balle envoie une balle coupée.