# Liban 2016

**EXERCICE 1 (4 points)**

**Commun à tous les candidats**

On considère un solide $ADECBF$ constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré $ABCD$ de centre $I$. Une représentation en perspective de ce solide est donnée **en annexe (*à rendre avec la copie*)**. Toutes les arêtes sont de longueur 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AK}\right)$

**1.** **a)** Montrer que $IE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points $I$, $E$ et $F$.

**b)** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est normal au plan $(ABE)$.

**c)** Déterminer une équation cartésienne du plan $(ABE)$.

**2.** On nomme $M$ le milieu du segment $[DF]$ et $N$ celui du segment $[AB]$.

**a)** Démontrer que les plans $(FDC)$ et $(ABE)$ sont parallèles.

**b)** Déterminer l'intersection des plans $(EMN)$ et $(FDC)$.

**c)** Construire sur l'**annexe (*à rendre avec la copie*)** la section du solide $ADECBF$ par le plan $(EMN)$.

# EXERCICE 1

## [ Liban 2016 ]

**1. a. a1. Montrons que $IE = \frac{\sqrt{2}}{2}$ :**

Dans le repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AK})$, les coordonnées des points A et C sont respectivement: A (0 ; 0 ; 0) et C (1 ; 1 ; 0) (car $\overrightarrow{AC} = 1 \times \overrightarrow{AB} + 1 \times \overrightarrow{BC}$).

Or I est le centre du carré ABCD.

Par conséquent: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$

et donc: $\overrightarrow{AI} = \left(\frac{0+1}{2}\,;\,\frac{0+1}{2}\,;\,\frac{0+0}{2}\right)$

cad: $\overrightarrow{AI} = \left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$.

Sur le graphique, nous remarquons que AEI est rectangle en I.

Ainsi, d'après Pythagore: $AE^2 = IE^2 + AI^2$

ou encore: $IE^2 = AE^2 - AI^2$.

Or: • $AE^2 = 1$ (" Toutes les arêtes sont de longueur 1 ").

• $AI^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2$

=> $AI^2 = \frac{1}{2}$.

D'où: $IE^2 = 1 - \frac{1}{2}$ => $IE^2 = \frac{1}{2}$.

En définitive: $IE^2 = \frac{1}{2}$ => $IE = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**1. a. a2. Déduisons-en les coordonnées des points I, E et F:**

- Les coordonnées du point I sont: $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

- Les coordonnées du point E sont: $E\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\left(\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \overrightarrow{AK}\right).$$

- Les coordonnées du point F sont: $F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\left(\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \overrightarrow{AK}\right).$$

Au total: $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$, $E\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

**1. b. Montrons que le vecteur $\vec{n}$ $(0; -2; \sqrt{2})$ est normal au plan (ABE):**

D'après le cours: un vecteur $\vec{n}$ $(a; b; c)$ est normal à un plan ssi ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.

Ici:
- il s'agit du plan (ABE);
- 2 vecteurs non colinéaires de ce plan sont respectivement:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix};$$

• $\vec{n}\ (0 ; -2 ; \sqrt{2})$.

De plus: • $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux car $(1 \times 0) + (0 \times -2) + (0 \times \sqrt{2}) = 0$;

• $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont orthogonaux car $\left(\frac{1}{2} \times 0\right) + \left(\frac{1}{2} \times -2\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}\right) = 0$.

Par conséquent: $\vec{n}$ est bien orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan. Donc $\vec{n}\ (0 ; -2 ; \sqrt{2})$ est un vecteur normal au plan (ABE).

**1. c. Déterminons une équation cartésienne du plan (ABE):**

Ici: • $\vec{n}\ (a = 0 ; b = -2 ; c = \sqrt{2})$ est un vecteur normal au plan (ABE);

• $A\ (0 ; 0 ; 0)$ est un point de l'espace.

D'où, une représentation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est: $a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) + c\,(z - z_A) = 0$

$\iff -2\,(y - 0) + \sqrt{2}\,(z - 0) = 0$

$\implies -2y + \sqrt{2}\,z = 0$.

En conclusion, une équation cartésienne du plan (ABE) est: $-2y + \sqrt{2}\,z = 0$.

**2. a. Démontrons que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles:**

D'après le cours:

• **Soit $\vec{n}$ le vecteur normal du plan P ;**

• **Soit $\vec{n}\,'$ le vecteur normal du plan P' ;**

• **P et P' sont deux plans parallèles ssi les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}\,'$ sont colinéaires (ou égaux).**

Mais d'après le cours, nous savons aussi que: **un vecteur $\vec{n}$ $(a\,;b\,;c)$ est normal à un plan ssi ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.**

Ici: • il s'agit du plan (FDC);

• 2 vecteurs non colinéaires de ce plan sont respectivement: $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{FC}$.

Or: $F\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $D\,(0\,;1\,;0)$ et $C\,(1\,;1\,;0)$.

D'où: $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$;

• $\vec{n}\,(0\,;-2\,;\sqrt{2})$.

De plus: • $\vec{n}$ et $\overrightarrow{FD}$ sont orthogonaux car:

$$\left(0\times-\frac{1}{2}\right)+\left(-2\times\frac{1}{2}\right)+\left(\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0;$$

• $\vec{n}$ et $\overrightarrow{FC}$ sont orthogonaux car:

$$\left(0\times\frac{1}{2}\right)+\left(-2\times\frac{1}{2}\right)+\left(\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0.$$

Par conséquent: $\vec{n}$ est bien orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (FDC). Donc $\vec{n}\,(0\,;-2\,;\sqrt{2})$ est un vecteur normal au plan (FDC).

Comme $\vec{n}$ est un vecteur normal aux plans (FDC) et (ABE), nous pouvons affirmer que ces deux plans sont parallèles.

**2. b. Déterminons l'intersection des plans (EMN) et (FDC):**

- Le point M appartient au plan (EMN).

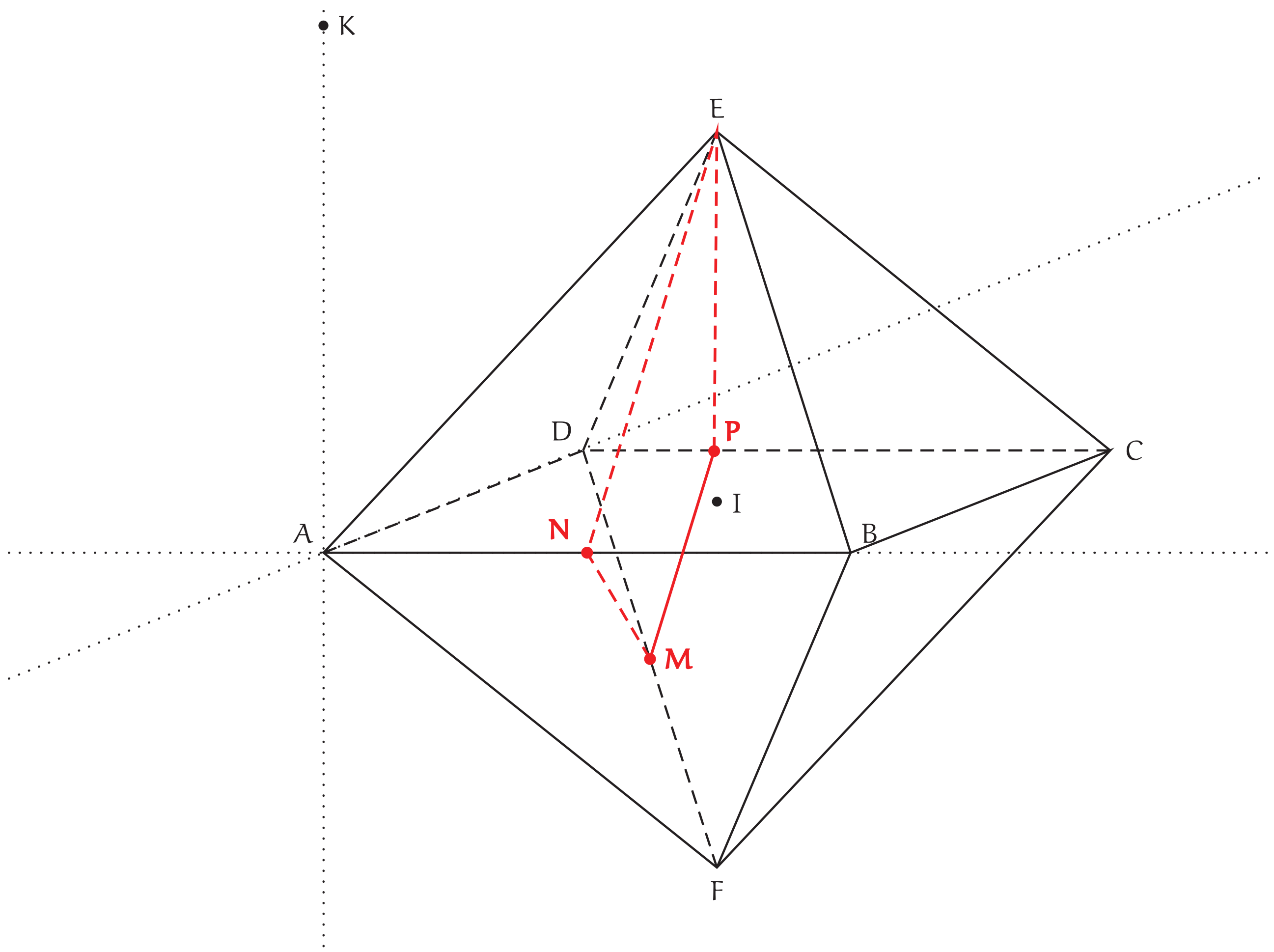
- Le point M appartient au plan (FDC) car M est le milieu du segment [DF].

- Par contre le point N, milieu du segment [AB] n'appartient pas au plan (FDC).

Dans ces conditions, les plans (FDC) et (EMN) sont sécants en une droite passant par le point M.

Plus exactement, il s'agit de la droite parallèle à la droite [EN] qui passe par le point M.

Graphiquement, nous avons:



**2. c. Construction de la section du solide ADECBF par le plan (EMN):**

Graphiquement, nous avons: