Sujet Spécialité

MATHÉMATIQUES

LIBAN

BAC S - 2015

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

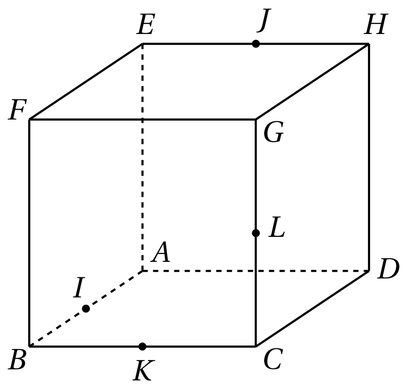
Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1 (6 points)

$ABCDEFGH$ est un cube.



I est le milieu du segment $[AB]$, J est le milieu du segment $[EH]$, K est le milieu du segment $[BC]$ et L est le milieu du segment $[CG]$.

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. **a)** Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

   b) En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).
3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point M.
4. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.
5. Calculer le volume du tétraèdre $FIJK$.
6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

EXERCICE 2 (6 points)

On définit la suite (u_n) de la façon suivante : pour tout entier naturel n, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.
2. **a)** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

   b) En déduire la valeur exacte de u_1.
3. **a)** Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Variables :	i et n sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur ...
Traitement :	Pour i variant de 1 à ...
	| Affecter à u la valeur ...
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

b) À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,6931	0,3069	0,1931	0,1402	0,1098	0,0902	0,0475	0,0099	0,0050

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

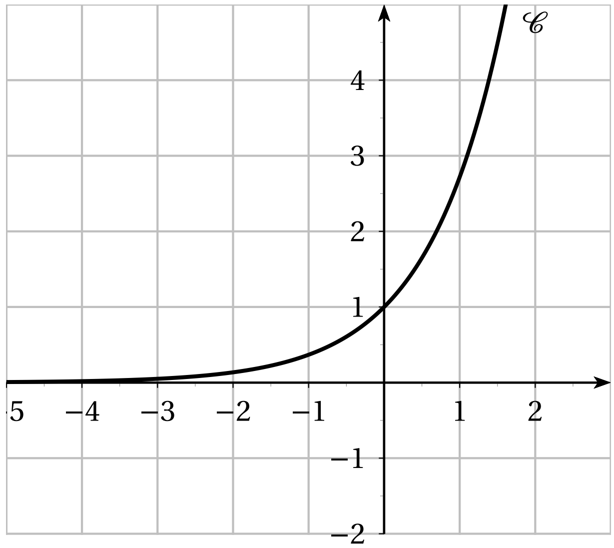
4. **a)** Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

5. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Démontrer que $\ell = 0$.

EXERCICE 3 (3 points)

On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \mathrm{e}^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathscr{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

1. Dans cette question, on choisit $m = \mathrm{e}$.
Démontrer que la droite $\mathscr{D}_\mathrm{e}$, d'équation $y = \mathrm{e}x$, est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.

2. Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}_m$.

3. Démontrer cette conjecture.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un fumeur décide d'arrêter de fumer. On choisit d'utiliser la modélisation suivante :

- s'il ne fume pas un jour donné, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,9 ;
- s'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

On appelle p_n la probabilité de ne pas fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer et q_n la probabilité de fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer.
On suppose que $p_0 = 0$ et $q_0 = 1$.

1. Calculer p_1 et q_1.

2. On utilise un tableur pour automatiser le calcul des termes successifs des suites (p_n) et (q_n). Une copie d'écran de cette feuille de calcul est fournie ci-dessous :

	A	B	C	D
1	n	p_n	q_n	
2	0	0	1	
3	1			
4	2			
5	3			

Dans la colonne A figurent les valeurs de l'entier naturel n.
Quelles formules peut-on écrire dans les cellules B3 et C3 de façon qu'en les recopiant vers le bas, on obtienne respectivement dans les colonnes B et C les termes successifs des suites (p_n) et (q_n) ?

3. On définit les matrices M et, pour tout entier naturel n, X_n par

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}.$$

On admet que $X_{n+1} = M \times X_n$ et que, pour tout entier naturel n, $X_n = M^n \times X_0$.
On définit les matrices A et B par $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que $M = A + 0,5B$.

b) Vérifier que $A^2 = A$, et que $A \times B = B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On admet dans la suite que, pour tout entier naturel n strictement positif, $A^n = A$ et $B^n = B$.

c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $M^n = A + 0,5^n B$.

d) En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_n = 0,8 - 0,8 \times 0,5^n$.

e) À long terme, peut-on affimer avec certitude que le fumeur arrêtera de fumer ?